

## Niet-lineaire dynamica in elektrische schakelingen (10 punten)

Neem voor het begin van deze opgave de algemene instructies uit de aparte enveloppe door!

### Inleiding

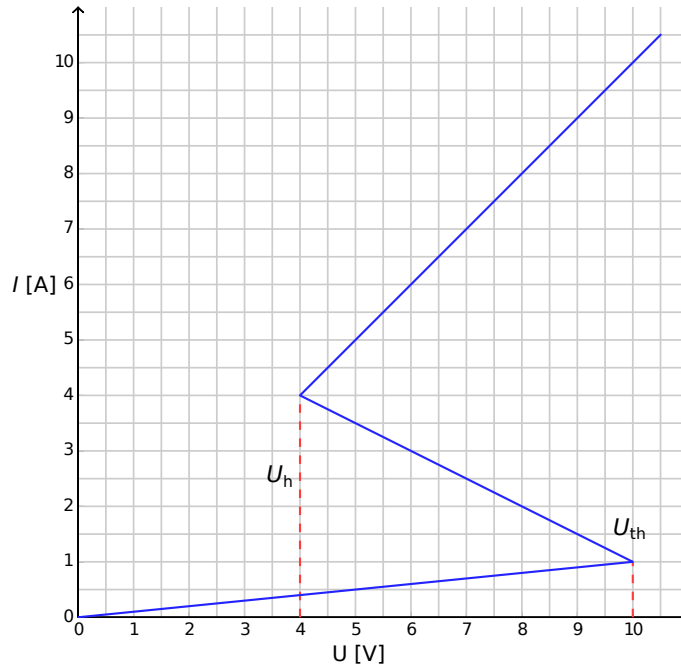
Bistabiele niet-lineaire halfgeleider elementen (bijvoorbeeld thyristors) worden veel gebruikt in elektronica als schakelaars en generatoren van elektromagnetische trillingen. Het grootste toepassingsgebied van thyristors is het regelen van wisselstromen in vermogenselektronica, bijvoorbeeld gelijkrichten van wisselstroom naar gelijkstroom op megawattschaal. Bistabiele elementen kunnen ook dienen als modelsystemen voor zelforganiserende verschijnselen in de natuurkunde (dit onderwerp wordt in deel B van het probleem behandeld), biologie (zie deel C) en andere gebieden van de moderne niet-lineaire wetenschap.

### Doelen

Onderzoeken van instabiliteiten en niet triviale dynamica van schakelingen met onderdelen die een niet-lineaire  $I-V$  karakteristiek hebben. Ontdekken van mogelijke toepassingen van dergelijke schakelingen in engineering en in het modelleren van biologische systemen.

### Deel A. Stationaire toestanden en instabiliteiten (3 punten)

Fig. 1 laat de zogenaamde **S-shaped**  $I-V$  karakteristiek zien van een niet-lineair element  $X$ . In het spanningsinterval tussen  $U_h = 4.00$  V (de *holding* spanning) and  $U_{th} = 10.0$  V (de drempel (*threshold*) spanning) is te zien dat deze  $I-V$  karakteristiek meerwaardig (*multivalued*) is. De grafiek in Fig. 1 wordt voor de eenvoud stuksgewijs (*piece-wise*) lineair genomen, elke tak is een deel van een rechte lijn. De lijn van de bovenste tak gaat door de oorsprong als deze wordt doorgetrokken. Deze benadering levert een goede beschrijving van echte thyristors.



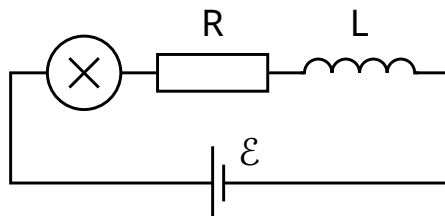
Figuur 1:  $I - V$  karakteristiek van het niet-lineaire element  $X$ .

- A.1** Bepaal met behulp van de grafiek de weerstand  $R_{\text{on}}$  van het element  $X$  in de bovenste tak van de  $I - V$  karakteristiek en  $R_{\text{off}}$  van de onderste tak. De middelste tak wordt beschreven door de vergelijking 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

Bepaal de waarden van de parameters  $I_0$  en  $R_{\text{int}}$ .

Het element  $X$  wordt in serie verbonden met een weerstand  $R$ , een spoel  $L$  en een ideale spanningsbron  $\mathcal{E}$  (zie Fig.2). Men zegt dat de schakeling in een stationaire toestand zit als de stroom in de tijd constant is, oftewel  $I(t) = \text{const.}$



Figuur 2: Schakeling met element  $X$ , weerstand  $R$ , spoel  $L$  en spanningsbron  $\mathcal{E}$ .

**A.2** Wat is het aantal mogelijke stationaire toestanden in de schakeling van Fig. 2 voor een vaste waarde van  $\mathcal{E}$  en voor  $R = 3.00 \Omega$ ? Hoe verandert dit antwoord als  $R = 1.00 \Omega$ ? 1pt

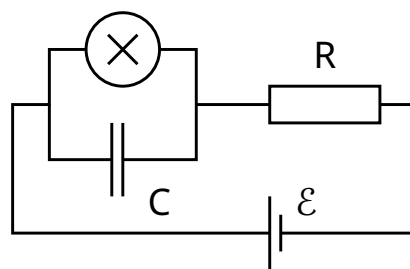
**A.3** Stel  $R = 3.00 \Omega$ ,  $L = 1.00 \mu\text{H}$  en  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$  in de schakeling van Fig. 2. Bepaal de waarden van de stroom  $I_{\text{stationary}}$  door en de spanning  $V_{\text{stationary}}$  over het niet-lineaire element  $X$  in de stationaire toestand. 0.6pt

De schakeling van Fig. 2 bevindt zich in een stationaire toestand met  $I(t) = I_{\text{stationary}}$ . Deze stationaire toestand wordt stabiel genoemd als na verandering (toename of afname van de stroom), de stroom weer terugkeert naar de stationaire toestand. Als de stroom echter steeds verder afwijkt van de stationaire toestand, wordt de stationaire toestand instabiel genoemd.

**A.4** Gebruik de numerieke waarden van vraag **A.3** en bestudeer de stabiliteit van de stationaire toestand met  $I(t) = I_{\text{stationary}}$ . Is de stationaire toestand stabiel of instabiel? 1pt

## Deel B. Bistabiele niet-lineaire elementen in de natuurkunde: radiozender (5 punten)

We gaan nu een nieuwe schakeling onderzoeken (zie Fig. 3). In deze nieuwe situatie wordt het niet-lineaire element  $X$  parallel geschakeld met een condensator met een capaciteit  $C = 1.00 \mu\text{F}$ . Dit blok wordt vervolgens in serie verbonden met een weerstand met een waarde  $R = 3.00 \Omega$  en een ideale spanningsbron. Deze spanningsbron levert een constante spanning  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ . Het blijkt dat deze schakeling gaat oscilleren. Hierbij springt het niet-lineaire element tijdens één cyclus van de ene tak in de  $I - V$  karakteristiek naar een andere tak.



Figuur 3: Schakeling met element  $X$ , condensator  $C$ , weerstand  $R$  en spanningsbron  $\mathcal{E}$ .

**B.1** Teken de oscillatiecyclus in de  $I - V$  grafiek, inclusief de richting (met de klok mee of tegen de klok in). Geef een duidelijke uitleg met behulp van vergelijkingen en schetsen. 1.8pt

**B.2** Geef uitdrukkingen voor de tijden  $t_1$  en  $t_2$  die het systeem doorbrengt in elke tak van de  $I - V$  grafiek tijdens de oscillatiecyclus. Bereken ook hun numerieke waarden. Geef de numerieke waarde van de oscillatieperiode  $T$  aangenomen dat de tijd nodig om van de ene tak in de  $I - V$  grafiek naar de andere te springen te verwaarlozen is. 1.9pt

**B.3** Maak een schatting van het gemiddeld gedissipeerde vermogen  $P$  in het niet-lineaire element gedurende één oscillatiecyclus. Een orde grootte is hier voldoende. 0.7pt

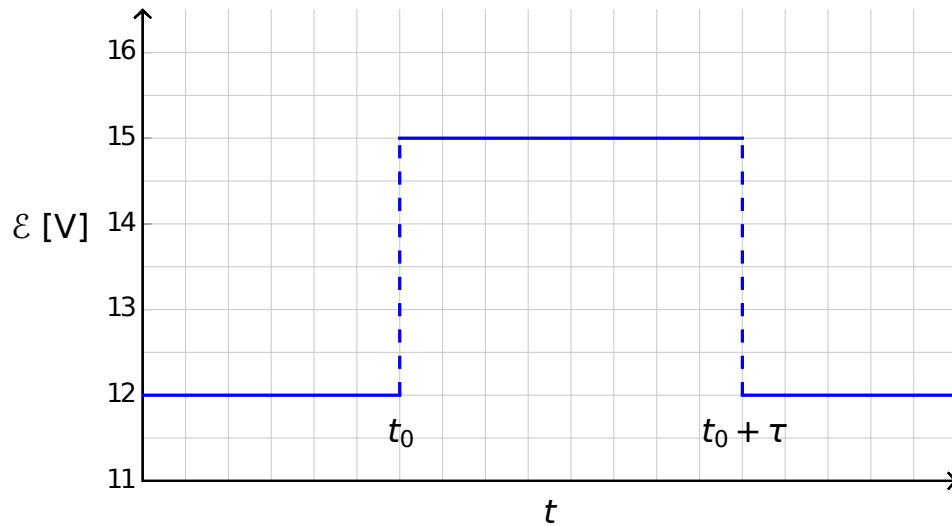
De schakeling in Fig. 3 wordt gebruikt om een radiozender te maken. Om dit te verwezenlijken, wordt het element  $X$  verbonden met het uiteinde van een lineaire antenne (een lange rechte draad). De antenne heeft een lengte  $s$ . Het andere einde van de draad is los. In de antenne ontstaat een elektromagnetische staande golf. De snelheid van elektromagnetische golven langs de antenne is dezelfde als in vacuüm. De zender gebruikt de grondfrequentie (laagste frequentie) met een periode  $T$  uit vraag **B.2**.

**B.4** Wat is de optimale waarde van  $s$  aangenomen dat deze niet groter kan zijn dan 1 km? 0.6pt

### Deel C. Bistabiele niet-lineaire elementen in de biologie: neuristor (2 punten)

In dit onderdeel van het probleem beschouwen we een toepassing van bistabiele niet-lineaire elementen bij het modelleren van biologische processen. Een neuron in het menselijk brein heeft de volgende eigenschap: als het wordt geëxciteerd door een extern signaal, zal het een enkele oscillatie maken en weer terugkeren naar de initiële toestand. Dit kenmerk wordt prikkelbaarheid (*excitability*) genoemd. Door dit kenmerk kunnen pulsen zich voortplanten in een netwerk van gekoppelde neuronen waaruit een zenuwstelsel bestaat. Een halfgeleiderchip ontworpen om de prikkelbaarheid en de pulsvoortplanting na te bootsen wordt een neuristor (samentrekking van neuron en transistor) genoemd.

We proberen een eenvoudige neuristor te modelleren door gebruik te maken van een schakeling waarin het eerder onderzochte niet-lineaire element  $X$  is opgenomen. Daartoe wordt de spanning  $\mathcal{E}$  in de schakeling van Fig. 3 verlaagd tot een waarde  $\mathcal{E}' = 12.0$  V. De oscillatie stopt hierdoor en bereikt een stationaire toestand. Vervolgens wordt de spanning snel verhoogd tot een waarde van  $\mathcal{E} = 15.0$  V, en na een periode  $\tau$  (met  $\tau < T$ ) weer teruggebracht naar de waarde  $\mathcal{E}'$  (zie Fig. 4). Het blijkt dat er een zekere kritische waarde  $\tau_{\text{crit}}$  is waarvoor geldt dat er kwalitatief ander gedrag is voor  $\tau < \tau_{\text{crit}}$  en voor  $\tau > \tau_{\text{crit}}$ .



Figuur 4: Spanning van de spanningsbron als functie van de tijd.

- |            |  |       |
|------------|--|-------|
| <b>C.1</b> | Schets de grafieken van de tijdsafhankelijkheid van de stroom $I_X(t)$ door het niet-lineaire element $X$ voor $\tau < \tau_{crit}$ en voor $\tau > \tau_{crit}$ . | 1.2pt |
| <b>C.2</b> | Geef een uitdrukking en de numerieke waarde voor de kritische tijd $\tau_{crit}$ waarbij het gedrag verandert.   | 0.6pt |
| <b>C.3</b> | Is de schakeling met $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s een neuristor?   | 0.2pt |