

## Nichtlineare Dynamik in Stromkreisen (10 Punkte)

Lies die Anweisungen in dem separaten Briefumschlag, bevor Du mit dieser Aufgabe beginnst.

### Einleitung

Bistabile nichtlineare halbleitende Komponenten (z.B. Thyristoren) finden eine breite Anwendung in der Technik. Sie werden z.B. als Schalter eingesetzt oder als Erzeuger von elektromagnetischen Schwingungen. Das Hauptanwendungsfeld dieser Thyristoren liegt jedoch in der Regelung des Wechselstroms in der Leistungselektronik, z.B. der Umwandlung von Wechsel- zu Gleichstrom in der Größenordnung Megawatt. Bistabile Komponenten werden aber auch als Modellsysteme für Selbstorganisationsphänomene in der Physik (dies wird in Teil B der Aufgaben thematisiert), Biologie (siehe Teil C) und andern Bereichen der moderner Forschung von nichtlinearen Systemen benutzt.

### Ziele

Untersuchung der Instabilitäten und nicht trivialen Dynamik von Stromkreisläufen mit nichtlinearen  $I - U$ -Charakteristiken. Entdeckung möglicher Anwendungen solcher Kreisläufe in der Erstellung und Modellierung biologischer Systeme.

### Aufgabenteil A. Stationäre Zustände und Instabilitäten (3 points)

Abb. 1 zeigt die sogenannten **S-förmige**  $I - U$  Eigenschaften einer nichtlinearen Komponente  $X$ . In dem Bereich von  $U_G = 4.00 \text{ V}$  (Grundspannung) und  $U_S = 10.0 \text{ V}$  (Schwellenspannung) besitzt der  $I - U$  Graph mehrere Funktionswerte. Der Einfachheit halber ist der Graph in Abb.1 stückweise linear (jeder Abschnitt ist eine gerade Strecke). Insbesondere geht die Verlängerung des obersten Abschnittes durch den Nullpunkt. Diese Näherung gibt eine gute Beschreibung von Thyristoren.

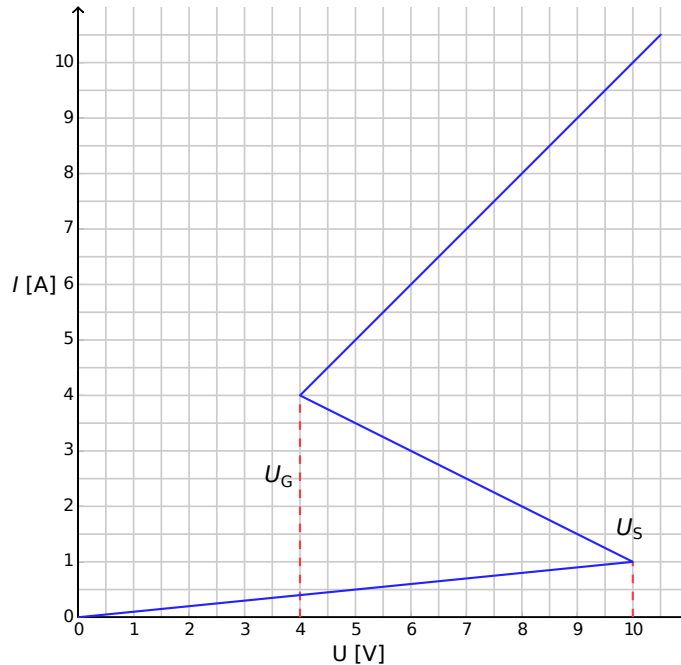


Abbildung 1:  $I - U$ -Charakteristik der nichtlinearen Komponente  $X$ .

- A.1** Bestimme, unter Verwendung des Graphen, zuerst den Widerstand  $R_{on}$  der Komponente  $X$  im oberen und  $R_{off}$  im unteren Abschnitt von  $I - U$ . Die mittlere Strecke wird durch folgende Gleichung beschrieben 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{int}}. \quad (1)$$

Bestimme die Werte für  $I_0$  und  $R_{int}$ .

Die Komponente  $X$  wird nun in Serie (siehe Abb.2) mit dem Widerstand  $R$ , einer Spule der Induktivität  $L$  und einer idealen Spannungsquelle  $\mathcal{E}$  (die Spannung der Spannungsquelle wird mit  $\mathcal{E}$  bezeichnet; engl.: *Electromotive Force - EMF*) geschaltet. Man sagt, dass sich der Stromkreis in einem stationären Zustand befindet, falls die Stromstärke zeitunabhängig ist,  $I(t) = \text{const}$ .

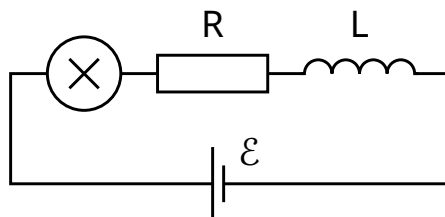


Abbildung 2: Stromkreis mit Komponente  $X$ , Widerstand  $R$ , Spule  $L$  und Spannungsquelle  $\mathcal{E}$ .

**A.2** Bestimme die mögliche Anzahl an stationären Zuständen die der Stromkreis in Abb. 2 für einen festen Wert von  $\mathcal{E}$  und mit  $R = 3.00 \Omega$  annehmen kann. Wie ändert sich das Ergebniss falls  $R = 1.00 \Omega$  ist? 1pt

**A.3** Es sei  $R = 3.00 \Omega$ ,  $L = 1.00 \mu\text{H}$  und  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$  in dem Stromkreis aus Abb. 2. Bestimme den Wert der Stromstärke  $I_{\text{stationär}}$  durch und der Spannung  $U_{\text{stationär}}$  über der nichtlinearen Komponente  $X$  im stationären Zustand. 0.6pt

Der Stromkreis in Abb. 2 ist in einem Ruhezustand  $I(t) = I_{\text{stationär}}$ . Der Zustand ist stabil, falls bei einer kleinen Änderung des Stromes der Strom wieder in den stationären Zustand zurückkehrt. Der Zustand ist instabil, falls die Stromänderung vom stationären Zustand weg führt.

**A.4** Benutze die numerische Werte aus Frage **A.3** und untersuche damit die Stabilität des stationären Zustands mit  $I(t) = I_{\text{stationär}}$ . Ist er stabil oder instabil? 1pt

## Aufgabenteil B. Bistabile nichtlineare Komponente in der Physik: Radiosender (5 Punkte)

Als nächstes untersuchst Du eine neue Konfiguration des Stromkreises (siehe Abb. 3). Diesmal ist die nichtlineare Komponente  $X$  in Parralelschaltung mit einem Kondensator der Kapazität  $C = 1.00 \mu\text{F}$  verbunden. Dieser Block ist dann in Reihe mit einem Widerstand  $R = 3.00 \Omega$  und einer idealen Spannungsquelle mit konstanter Spannung  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$  geschaltet. Es zeigt sich, dass der Stromkreis Schwingungen ausführt. Hierbei kommt es in einer Schwingungsperiode vor, dass die nichtlinearen Komponente  $X$  von einem Abschnitt im  $I - U$ -Diagramm auf einen anderen Abschnitt im  $I - U$ -Diagramm springt.

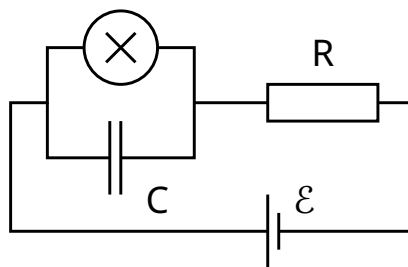


Abbildung 3: Stromkreislauf mit Komponente  $X$ , Kondensator  $C$ , Widerstand  $R$  and Spannungsquelle  $\mathcal{E}$ .

**B.1** Zeichne den Verlauf einer Schwingungsperiode einschliesslich Richtungsangabe (im oder gegen den Uhrzeigersinn) in das  $I - U$ -Diagramm. Begründe Deine Antwort mit Gleichungen und Skizzen. 1.8pt

**B.2** Finde Ausdrücke für die Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  welche das System auf den jeweiligen Abschnitten des  $I-U$ -Diagramms während einer Schwingungsperiode verbringt. Bestimme numerische Werte für diese Zeiten. Finde die numerischen Werte für die Schwingungsdauer  $T$  unter der Annahme, dass die Zeit für die Sprünge zwischen den Abschnitten des  $I-U$  Graphen vernachlässigbar ist. 1.9pt

**B.3** Schätze die Durchschnittsleistung  $P$ , die durch das nichtlineare Element während eines Durchlaufs verbraucht wird. Eine größenordnungsmäßige Einschätzung ist ausreichend. 0.7pt

Der Stromkreislauf in Abb. 3 wird benutzt um einen Radiosender zu bauen. Hierfür wird die Komponente  $X$  an das Ende einer geradlinigen Antenne der Länge  $s$  angebracht. Das andere Ende der Antenne ist frei (nicht angeschlossen). In der Antenne werden elektromagnetische Wellen produziert. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle in bzw. entlang der Antenne ist gleich der Vakuumlichtgeschwindigkeit. Der Sender benützt die harmonische Grundschwingung des Systems, welche die Periode  $T$  aus Aufgabe **B.2** hat.

**B.4** Was ist der Optimalwert für  $s$  unter der Annahme, dass  $s$  nicht länger als 1 km sein darf? 0.6pt

### Teil C. Bistabile nichtlineare Bauteile in der Biologie: Der Neuristor (2 Punkte)

In diesem Abschnitt der Aufgabe widmen wir uns der Anwendung von Thyristoren für das Modellieren biologischer Prozesse. Ein Neuron im menschlichen Gehirn hat folgende Eigenschaften: Bei Stimulation durch ein externes Signal vollzieht das Neuron eine einzige Oszillation und kehrt dann zu seinem Ausgangszustand zurück. Diese Eigenschaft wird Anregbarkeit genannt, wodurch Nervenpulse in dem Netzwerk gekoppelter Neuronen, dem Nervensystem, weitergeleitet werden können. Ein Halbleiterchip, entworfen, um diese Erregung darzustellen, wird Neuristor genannt (Zusammensetzung aus Neuron und Transistor).

Wir versuchen einen einfachen Neuristor durch einen Stromkreis, den wir schon vorher untersucht haben und die nichtlineare Komponente  $X$  beinhaltet, zu modellieren. Hierzu wird die Spannung  $\mathcal{E}$  in dem Kreislauf aus Abb. 3 auf den Wert  $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$  gesenkt. Die Schwingungen stoppen und das System erreicht einen stationären Zustand. Danach wird die Spannung ruckartig auf einen Wert  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$  erhöht, und nach einer Zeit  $\tau$  (mit  $\tau < T$ ) wieder zurück auf den Wert

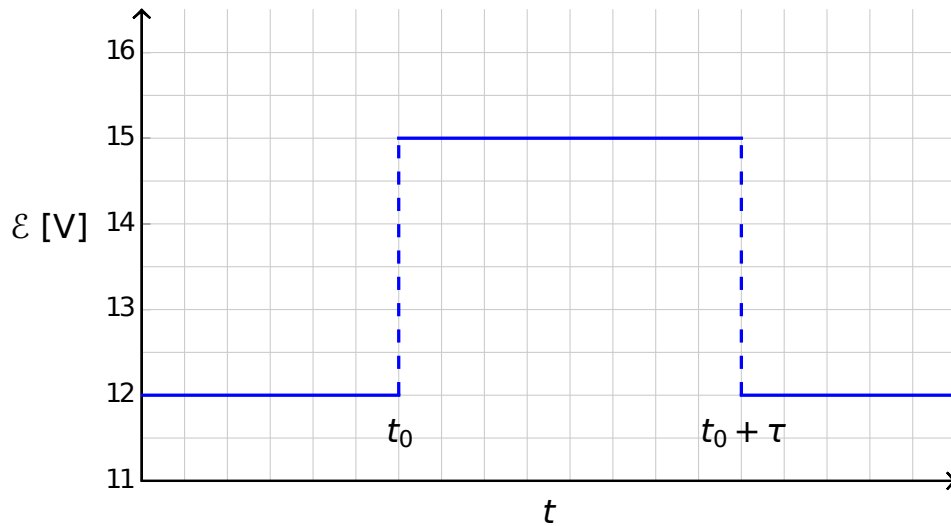


Abbildung 4: Spannung der Spannungsquelle als Funktion der Zeit.

- |            |   |       |
|------------|---|-------|
| <b>C.1</b> | Skizziere die Graphen der Zeitabhängigkeit des Stroms $I_X(t)$ der nichtlinearen Komponente $X$ für $\tau < \tau_{\text{crit}}$ und für $\tau > \tau_{\text{crit}}$ . | 1.2pt |
| <b>C.2</b> | Finden Sie einen Ausdruck und den numerischen Wert für die kritische Zeit $\tau_{\text{crit}}$ , bei welchem sich das Verhalten ändert.                               | 0.6pt |
| <b>C.3</b> | Stellt der Stromkreis mit $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s einen Neuristor da?  | 0.2pt |