

## 电路中的非线性力学 (10 分)

开始做题之前请仔细阅读另外一个信封中的考试指南

### 介绍

双稳态非线性半导体元件（例如晶闸管）广泛用于电子开关和电磁振荡发生器。晶闸管应用的主要领域是在电力电子产品中控制交变电流，例如，将兆瓦级别交流电整流为直流电。双稳态元件也可以作为模型系统，以模拟物理学中的自组织现象（B 部分讨论的就是这个问题），还可用于生物学（见 C 部分）和现代非线性科学等领域。

### 目标

电路中含有非线性 I-V 特性的元件，研究这种电路的不稳定性和复杂动力学。探究此类电路在工程和生物系统建模中的应用。

### A 部分 定态与不稳定性 (3 分)

图 1 所示的是某非线性元件  $X$  具有的所谓 S-形的  $I-V$  特性。在电压范围  $U_h = 4.00\text{ V}$  (保持电压) 和  $U_{th} = 10.0\text{ V}$  (阈值电压) 间，此 I-V 特性电压是多值的。为简单起见，图 1 中的图形可被视为分段的线性直线（每个分段都是直线的一段）。特别注意，如果延长上段直线，其延长线将经过原点。这种近似是对真实晶闸管的一个相当好的描述。

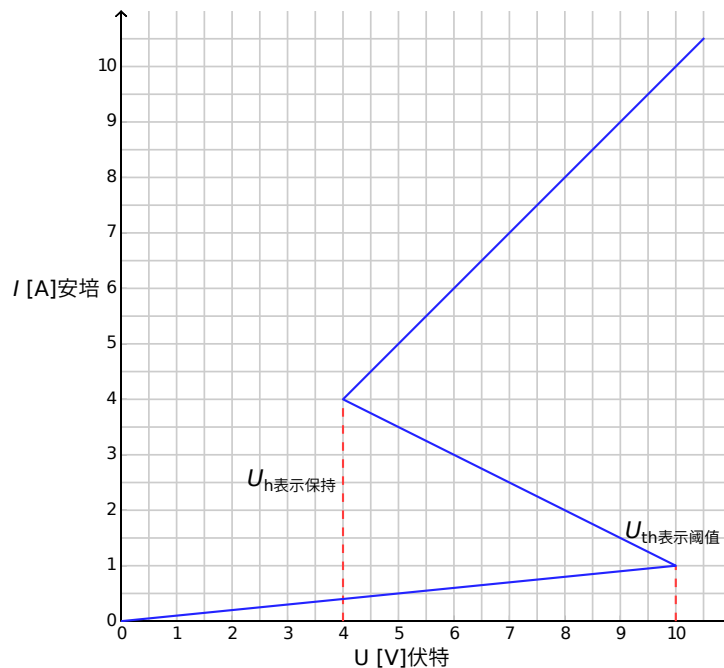


图 1: 非线性元件  $X$  的  $I-V$  特性图

- A.1** 使用图 1, 分别计算  $X$  元件  $I - V$  特性图线上方分段的电阻的值  $R_{\text{on}}$ , 下方分段的电阻的值  $R_{\text{off}}$ 。而中间分段的电阻  $R_{\text{int}}$  满足 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

计算参数  $I_0$  和  $R_{\text{int}}$  的值

如图 2, 元件  $X$  和电阻  $R$ 、电感  $L$  及一个理想电压源  $\mathcal{E}$  串联在一起, 当电路的电流不随时间而变, 即  $I(t) = \text{常数}$  时, 我们称此电路处于定态 (静态)。

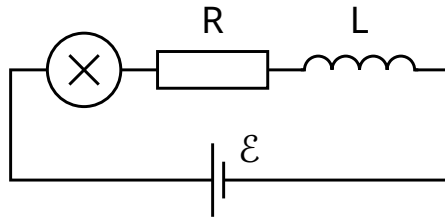


图 2: 元件  $X$ 、电阻  $R$ 、电感  $L$  和电压源  $\mathcal{E}$  的电路

- A.2** 图 2 电路中, 当  $\mathcal{E}$  值不变,  $R = 3.00 \Omega$  时, 可能的定态数量是多少? 当  $R = 1.00 \Omega$  时的定态又是几个? 1pt

- A.3** 在图 2 中, 设  $R = 3.00 \Omega$ ,  $L = 1.00 \mu\text{H}$  和  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ , 计算定态时非线性元件  $X$  上的电流  $I_{\text{stationary}}$  的值和电压  $V_{\text{stationary}}$  的值。下标 stationary 的意思是定态。 0.6pt

当图 2 处于电流  $I(t) = I_{\text{stationary}}$  的定态下, 如果将电流稍微改变一个微小量 (电流增加或减少) 之后, 电流趋向于返回到定态, 则称这种定态是稳定的。如果系统趋向于远离定态, 则它是不稳定的。

- A.4** 使用 A.3 小题的数值结果, 研究  $I(t) = I_{\text{stationary}}$  的定态的稳定性。此定态是稳定的还是不稳定的? 1pt

## B 部分 双稳态非线性元件的物理应用: 无线电发射器 (5 分)

现在我们研究一个新的电路配置 (见图 3)。此时, 非线性元件  $X$  与电容  $C = 1.00 \mu\text{F}$  的电容器并联, 然后再与  $R = 3.00 \Omega$  的电阻和  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$  的理想恒压源串联。事实证明这个电路会发生振荡, 其非线性元件  $X$  在一个振荡周期内会从  $I - V$  特性的一个分段跳变到另一个分段。

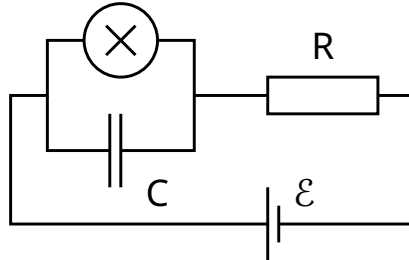


图 3: 包含元件  $X$ 、电容  $C$ 、电阻  $R$  和电压源  $\mathcal{E}$  的电路。

**B.1** 在  $I - V$  图上绘制振荡周期图，包括它的方向（顺时针或逆时针）。并使用方程和作图证明你的答案。 1.8pt

**B.2** 时间  $t_1$  和  $t_2$  为一个振荡周期内  $I - V$  图线每个分段上经历的时间，求出  $t_1$  和  $t_2$  的表达式，并计算出它们的数值。假设  $I - V$  图中，从一个分段跳跃到另一分段所需的时间忽略不计，求出振荡周期  $T$  的数值。 1.9pt

**B.3** 估算一个振荡周期内，非线性元件消耗的平均功率  $P$ 。给出其数量级。 0.7pt

图 3 中的电路被用作无线电发射器。出于该用途，元件  $X$  被连接到长度为  $s$  的线性天线（长直导线）的一端。天线的另一端是自由的。在天线上形成一个电磁波驻波。沿着天线的电磁波的速度和真空中的是一样的。发射器使用系统的主谐波，其周期为 B.2 小题中的周期  $T$ 。

**B.4** 在天线长度  $s$  不超过 1km 的情况下， $s$  的最佳值是多少？ 0.6pt

### C 部分 双稳态非线性元件的生物学应用：类神经器件（2 分）

在该问题中，我们考虑双稳态非线性元件在生物过程建模中的应用。人脑中的一个神经元具有以下特性：当受外部信号刺激时，它产生一次振荡，然后返回到它的初始状态。此特性被称为应激性。由于这种特性，脉冲可以在构建神经系统的耦合神经网络中传播。被设计成模拟应激性和脉冲传播的半导体芯片称为类神经器件（neuristor）（neuristor 由英文中神经元和晶体管两个单词而衍生）

使用我们先前研究的包含非线性元素  $X$  的电路，我们来模拟类神经器件。为此，将图 3 电路中的电压  $\mathcal{E}$  减小到值  $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$ ，此时振荡停止，并且系统达到它的定态。然后，电压迅速增加回升至  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ ，并在经过一段时间  $\tau$  后（且  $\tau < T$ ）被再次设置到值  $\mathcal{E}'$ （如图 4 所示）。事实证明，存在一个时间临界值  $\tau_{\text{crit}}$ ，而且，当  $\tau < \tau_{\text{crit}}$  和  $\tau > \tau_{\text{crit}}$  时系统的行为是完全不同的。

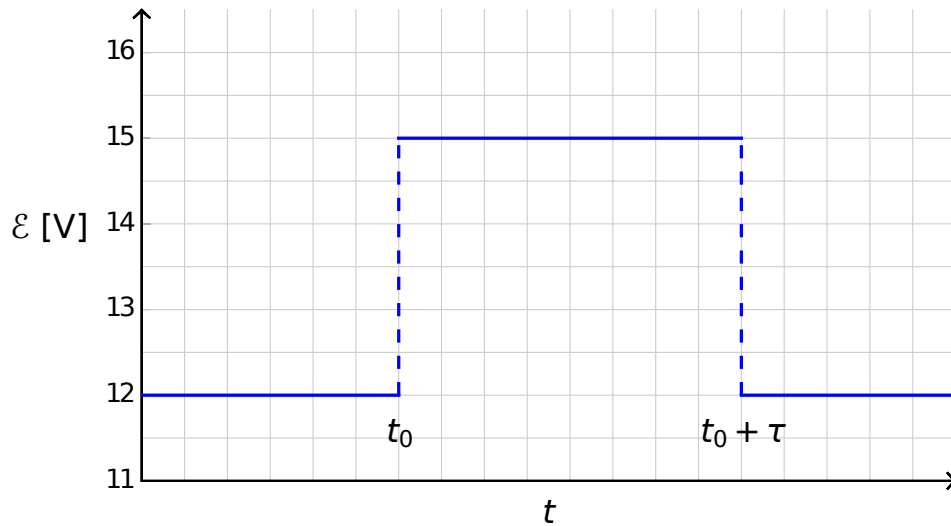


图 4：电压源的电压随时间变化

**C.1** 绘制非线性元件 X 上的电流  $I_X(t)$  随着时间变化的图，分  $\tau < \tau_{\text{crit}}$  和  $\tau > \tau_{\text{crit}}$  两种情况分别画出两个图。 1.2pt

**C.2** 求出电流跳变切换的临界时间  $\tau_{\text{crit}}$  的表达式，并计算其数值。 0.6pt

**C.3** 对于以上电路，当  $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$  s 时，能模拟一个类神经器件吗？ 0.2pt