

## Μη γραμμική δυναμική σε Ηλεκτρικά Κυκλώματα (10 μονάδες)

Παρακαλείστε, να διαβάσετε τις Γενικές Οδηγίες που βρίσκονται σε ξεχωριστό φάκελο πριν ξεκινήσετε την επίλυση αυτού του προβλήματος.

### Εισαγωγή

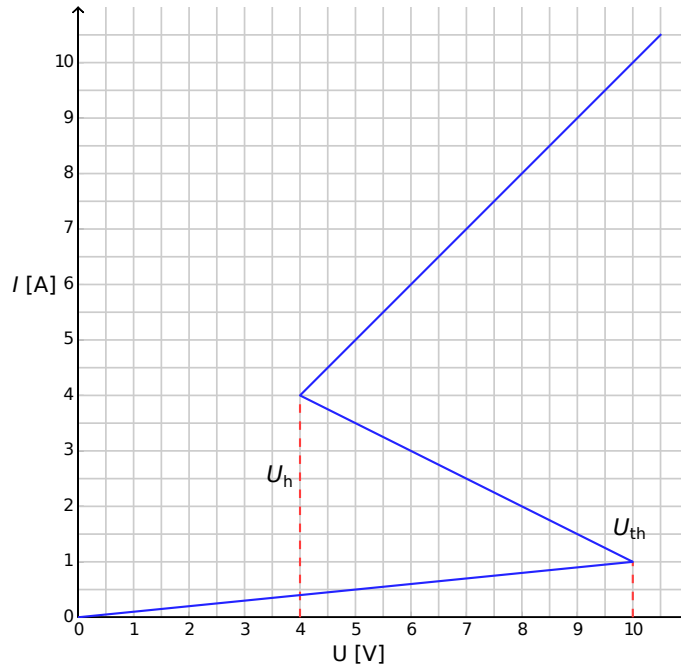
Τα δισταθή μη γραμμικά ημιαγώγιμα στοιχεία (π.χ τα θύριστορ) χρησιμοποιούνται ευρέως στα ηλεκτρονικά κυκλώματα ως διακόπτες ή γεννήτριες ηλεκτρομαγνητικών ταλάντωσης. Το πρωταρχικό πεδίο εφαρμογής των θύριστορ ήταν ως στοιχεία ελέγχου εναλλασσόμενων ρευμάτων σε ηλεκτρονικά κυκλώματα ισχύος π.χ μετατροπή εναλλασσόμενου ρεύματος (AC) σε συνεχές (DC) σε κλίμακα Megawatt. Ακόμα, τα δισταθή στοιχεία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μοντέλα για αυτοοργανούμενα συστήματα στη Φυσική (κάτι με το οποίο ασχολείται το μέρος Β του προβλήματος αυτού), στη Βιολογία (βλ. μέρος Γ) και σε άλλα πεδία της σύγχρονης μη γραμμικής επιστήμης.

### Στόχοι

Να μελετήσετε τις αστάθειες και τη μη τετριμμένη δυναμική κυκλωμάτων, τα οποία περιλαμβάνουν στοιχεία των οποίων η χαρακτηριστική  $I - V$  είναι μη γραμμική. Να ανακαλύψετε πιθανές εφαρμογές τέτοιων κυκλωμάτων στη μηχανολογία και στη μοντελοποίηση βιολογικών συστημάτων.

### Μερος Α. Στατικές καταστάσεις και αστάθειες. (3 μονάδες)

Στο Σχήμα 1 διακρίνεται η αποκαλούμενη **S- μορφή (S-shaped)** που είναι η χαρακτηριστική  $I - V$  ενός μη γραμμικού στοιχείου  $X$ . Στο εύρος τάσεων μεταξύ  $U_h = 4.00 \text{ V}$  (τάση συγκράτησης - holding voltage) και  $U_{th} = 10.0 \text{ V}$  (τάση κατωφλίου - threshold voltage) βλέπουμε στη χαρακτηριστική  $I - V$  ότι για κάθε τιμή της τάσης μπορεί να αντιστοιχούν περισσότερες από μία τιμές του ρεύματος. Για απλότητα, η γραφική παράσταση του σχήματος 1 επιλέχθηκε ώστε να αποτελείται από τμήματα ευθειών, προσεγγίζοντας έτσι αρκετά καλά την περιγραφή ενός πραγματικού θύριστορ. Σημειώνουμε πως η προέκταση της ευθείας του ψηλότερου τμήματος περνά, από την αρχή των αξόνων.



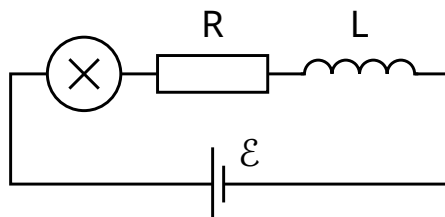
Σχήμα 1: Η χαρακτηριστική  $I - V$  ενός μη γραμμικού στοιχείου  $X$ .

- A.1** Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση για να προσδιορίσετε την αντίσταση  $R_{\text{on}}$  του στοιχείου  $X$  στο πάνω τμήμα της χαρακτηριστικής  $I - V$  και την αντίσταση  $R_{\text{off}}$  στο κατώτερο τμήμα της χαρακτηριστικής, αντίστοιχα. Το μεσαίο τμήμα της γραφικής περιγράφεται από την εξίσωση 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

Να προσδιορίσετε τις τιμές των παραμέτρων  $I_0$  και  $R_{\text{int}}$ .

Στο σχήμα 2 φαίνεται το στοιχείο  $X$  που είναι συνδεδεμένο σε σειρά με ένα αντιστάτη αντίστασης  $R$ , ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής  $L$  και μια ιδανική πηγή τάσης (χωρίς εσωτερική αντίσταση) ηλεκτρεγερτικής δύναμης  $\mathcal{E}$ . Θα λέμε ότι το κύκλωμα βρίσκεται σε στατική κατάσταση, όταν η τιμή της έντασης του ρεύματος είναι σταθερή με τον χρόνο,  $I(t) = \text{σταθερό}$ .



Σχήμα 2: Σε σειρά κύκλωμα που αποτελείται από το στοιχείο  $X$ , αντιστάτη  $R$ , πηνίο  $L$  και ιδανική πηγή τάσης  $\mathcal{E}$ .

**A.2** Να προσδιορίσετε τα πιθανά πλήθη των στατικών καταστάσεων του κυκλώματος του σχήματος 2 για συγκεκριμένη τιμή ηλεκτρεγερτικής δύναμης  $\mathcal{E}$  και για αντίσταση  $R = 3.00 \Omega$ . Πως διαφοροποιείται η απάντησή σας, αν η τιμή της αντίστασης γίνει  $R = 1.00 \Omega$ ; 1pt

**A.3** Δίνονται  $R = 3.00 \Omega$ ,  $L = 1.00 \mu\text{H}$  and  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$  για τα στοιχεία του κυκλώματος του σχήματος 2. Να προσδιορίσετε την τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το μη γραμμικό στοιχείο  $X$ ,  $I_{\text{stationary}}$ , καθώς και την αντίστοιχη τιμή της τάσης  $V_{\text{stationary}}$  στα άκρα του, στην στατική κατάσταση. 0.6pt

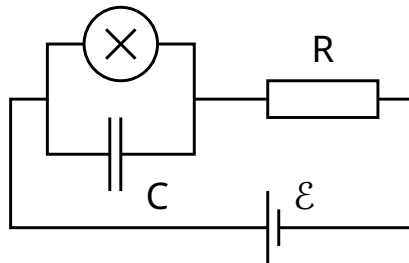
Το κύκλωμα του σχήματος 2 βρίσκεται στη στατική κατάσταση  $I(t) = I_{\text{stationary}}$ .

Η στατική κατάσταση αυτή είναι ευσταθής, όταν μετά από μια μικρή μεταβολή στην τιμή της έντασης του ρεύματος (αύξηση ή μείωση), η τιμή της έντασης του ρεύματος επιστρέφει κατευθείαν στην τιμή που είχε αρχικά στην στατική κατάσταση. Αντίθετα, αν η μεταβολή στην ένταση του ρεύματος έχει ως αποτέλεσμα η ένταση του ρεύματος να απομακρύνεται από την τιμή που είχε αρχικά στη στατική κατάσταση, τότε η στατική κατάσταση είναι ασταθής.

**A.4** Να χρησιμοποιήσετε τα αριθμητικά δεδομένα του ερωτήματος **A.3** και να μελετήσετε την ευστάθεια της στατικής κατάστασης με  $I(t) = I_{\text{stationary}}$ . Να χαρακτηρίσετε την στατική κατάσταση  $I(t) = I_{\text{stationary}}$  ως ασταθή ή ευσταθή. 1pt

## Μέρος Β. Χρήση δισταθούς μη γραμμικού στοιχείου στη Φυσική: Ραδιοπομπός (5 μονάδες)

Τώρα θα μελετήσετε ένα νέο κύκλωμα, το οποίο φαίνεται στο σχήμα 3. Αυτή τη φορά το μη γραμμικό στοιχείο  $X$  είναι συνδεδεμένο παράλληλα με ένα πυκνωτή χωρητικότητας  $C = 1.00 \mu\text{F}$ . Ο παράλληλος συνδυασμός αυτός, είναι συνδεδεμένος σε σειρά με ένα αντιστάτη αντίστασης  $R = 3.00 \Omega$  και μια ιδανική πηγή τάσης ηλεκτρεγερτικής δύναμης  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ . Προκύπτει ότι το κύκλωμα αυτό εκτελεί ταλαντώσεις, με το μη γραμμικό στοιχείο  $X$  να μεταπηδά από το ένα τμήμα της χαρακτηριστικής  $I - V$  σε άλλο, κατά τη διάρκεια μιας περιόδου.



Σχήμα 3: Κύκλωμα που περιλαμβάνει το μη γραμμικό στοιχείο  $X$ , πυκνωτή  $C$ , αντιστάτη  $R$  και ιδανική πηγή τάσης  $\mathcal{E}$ .

**B.1** Να σχεδιάσετε τον κύκλο της ταλάντωσης στη γραφική παράσταση  $I - V$  και να δείξετε τη φορά διαγραφής του (κατα τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή κατά την αντίθετη φορά). Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας, χρησιμοποιώντας κατάλληλες σχέσεις και διαγράμματα. 1.8pt

**B.2** Να εξάγετε τις σχέσεις που εκφράζουν τα χρονικά διαστήματα  $t_1$  και  $t_2$  για τους οποίους το σύστημα παραμένει σε κάθε τμήμα της χαρακτηριστικής  $I - V$  στη διάρκεια μιας περιόδου της ταλάντωσης. 1.9pt  
Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των χρονικών διαστημάτων.  
Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της περιόδου  $T$  της ταλάντωσης. Να θεωρήσετε ότι ο χρόνος που χρειάζεται το σύστημα για να μεταπηδήσει από το ένα τμήμα της γραφικής  $I - V$  στο άλλο είναι αμελητέος.

**B.3** Να εκτιμήσετε τη μέση Ισχύ  $P$  η οποία απορροφάται από το μη-γραμμικό στοιχείο  $X$ , κατά τη διάρκεια μιας περιόδου της ταλάντωσης. Ο προσδιορισμός της τάξης μεγέθους είναι επαρκής για την απάντησή σας. 0.7pt

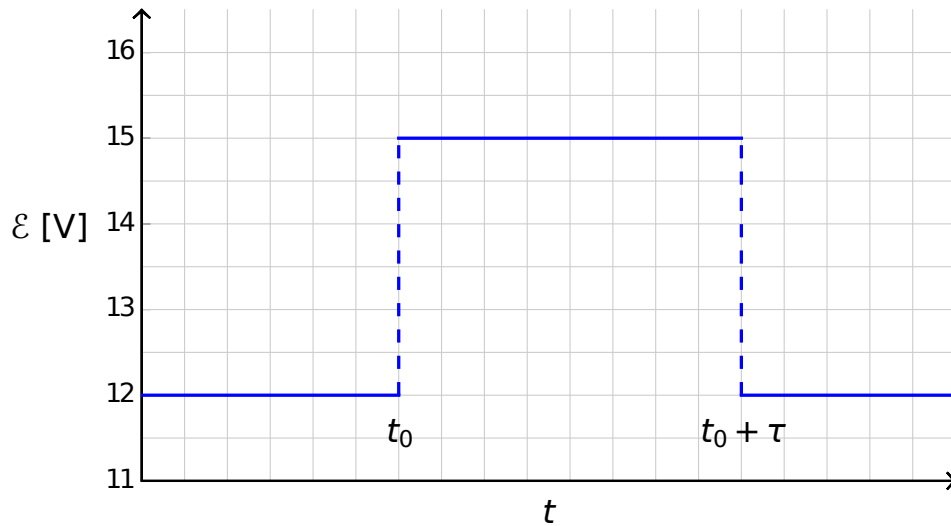
Το κύκλωμα του σχήματος 3 χρησιμοποιείται για τη δημιουργία ενός Ραδιοπομπού. Για τη χρήση αυτή, το μη γραμμικό στοιχείο  $X$  στερεώνεται στο ένα άκρο μιας ευθείας κεραίας (μακρύ και ευθύγραμμο καλώδιο) μήκους  $s$ . Το άλλο άκρο της κεραίας είναι ελεύθερο. Στην κεραία δημιουργείται ένα στάσιμο ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Να θεωρήσετε ότι η ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην κεραία είναι ίση με αυτή στο κενό. Ο πομπός λειτουργεί στη θεμελιώδη συχνότητα του συστήματος δηλαδή έχει περίοδο  $T$  αυτήν που υπολογίσατε στο ερώτημα **B.2**.

**B.4** Να υπολογίσετε την καλύτερη τιμή για το μήκος  $s$  της κεραίας, δεδομένου ότι το μήκος αυτό δεν μπορεί να υπερβαίνει το 1 km. 0.6pt

## Μέρος Γ. Χρήση δισταθούς μη γραμμικού στοιχείου στη Βιολογία: νευρίστορ (neuristor) (2 μονάδες)

Στο μέρος αυτό του προβλήματος, θα εξετάσουμε μια εφαρμογή των δισταθών μη γραμμικών στοιχείων στη μοντελοποίηση βιολογικών διαδικασιών. Στον ανθρώπινο εγκέφαλο ένας νευρώνας έχει την ακόλουθη ιδιότητα: όταν διεγερθεί από ένα εξωτερικό ερέθισμα (σήμα) κάνει μια και μοναδική πλήρη ταλάντωση και ακολούθως επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση ηρεμίας. Η λειτουργία αυτή ονομάζεται διεγερσιμότητα. Εξαιτίας της ιδιότητας αυτής, παλμοί διαδίδονται σε ένα δίκτυο συζευγμένων νευρώνων που αποτελούν το νευρικό σύστημα. Ένας τεχνητός νευρώνας (chip) κατασκευασμένος από ημιαγωγό, σχεδιάστηκε για να μιμείται τη διεγερσιμότητα και να εκπέμπει παλμούς. Το εξάρτημα αυτό ονομάζεται "νευρίστορ" (*neuristor*) και πήρε το όνομά του από τις λέξεις νευρώνας και τρανζίστορ.

Θα επιχειρήσουμε να μοντελοποιήσουμε ένα απλό νευρίστορ, χρησιμοποιώντας ένα κύκλωμα το οποίο περιλαμβάνει το μη γραμμικό στοιχείο  $X$  που μελετήσαμε προηγουμένως. Στην εφαρμογή αυτή η τάση της ιδανικής πηγής του κυκλώματος στο σχήμα 3 ελαττώνεται και παίρνει την τιμή  $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$ . Οι ταλαντώσεις σταματούν και το σύστημα φτάνει στη στατική του κατάσταση. Τότε η τάση αυξάνεται πολύ γρήγορα και παίρνει την τιμή  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$  και μετά από ένα χρονικό διάστημα  $\tau$  (όπου  $\tau < T$ ) παίρνει ξανά την τιμή  $\mathcal{E}'$  (βλ. Σχήμα. 4). Προκύπτει ότι υπάρχει μια συγκεκριμένη κρίσιμη τιμή  $\tau_{\text{crit}}$ . Με βάση την τιμή αυτή το σύστημα επιδεικνύει ποιοτικά εντελώς διαφορετική συμπεριφορά για  $\tau < \tau_{\text{crit}}$  και για  $\tau > \tau_{\text{crit}}$ .



Σχήμα 4: Τάση της ιδανικής πηγής τάσης σε σχέση με το χρόνο.

- |            |  |       |
|------------|--|-------|
| <b>C.1</b> | Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις της έντασης του ρεύματος $I_X(t)$ που διαρρέει το μη γραμμικό στοιχείο $X$ για $\tau < \tau_{\text{crit}}$ και για $\tau > \tau_{\text{crit}}$ σε συνάρτηση με τον χρόνο. | 1.2pt |
| <b>C.2</b> | Να εξάγετε τη σχέση και να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της κρίσιμης τιμής του χρόνου $\tau_{\text{crit}}$ για την οποία το σύστημα αλλάζει συμπεριφορά.  | 0.6pt |
| <b>C.3</b> | Να αναφέρετε αν το κύκλωμα λειτουργεί ως νευρίστορ όταν το χρονικό διάστημα $\tau$ παίρνει την τιμή $\tau = 1.00 \times 10^{-6} \text{ s}$ .   | 0.2pt |