

## Dynamique non-linéaire des circuits électriques (10 points)

Veuillez lire les instructions générales situées dans l'enveloppe séparée avant de commencer ce problème.

### Introduction

Les éléments semi-conducteurs non-linéaires bistables (par exemple les thyristors) sont largement utilisés en électronique comme interrupteurs et générateurs d'oscillations électromagnétiques. Le premier champ d'application des thyristors est le contrôle de courants alternatifs en électronique de puissance, par exemple pour redresser des courants alternatifs (AC) en courants continus (DC) pour des puissances de l'ordre du mégawatt. Les éléments bistables peuvent aussi servir de systèmes modèles pour l'auto-organisation en physique (ce sujet est abordé en partie B du problème), en biologie (partie C) et dans les autres champs des sciences non-linéaires modernes.

### Buts

Étudier les instabilités et la dynamique non-triviale des circuits incluant des éléments avec une caractéristique  $I - U$  non-linéaire.

Découvrir des applications possibles de tels circuits en ingénierie et en modélisation de systèmes biologiques.

### Partie A. États stationnaires et instabilités (3 points)

La figure 1 montre la caractéristique  $I - U$  dite "**en forme de S**" d'un élément non-linéaire  $X$ . Dans la gamme de tension entre  $U_h = 4,00$  V (tension d'attente) et  $U_{th} = 10,0$  V (tension d'amorçage) cette caractéristique  $I - U$  a plusieurs valeurs. Pour simplifier, le graphe de la figure 1 est linéaire par morceaux (chaque branche est un segment de droite). En particulier, la demi-droite de la branche supérieure passe par l'origine lorsqu'elle est prolongée. Cette approximation donne une bonne description des thyristors réels.

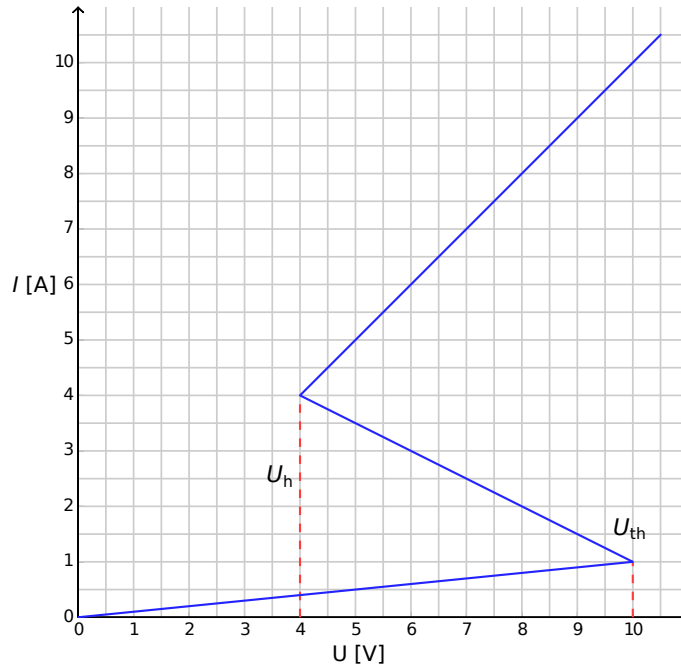


Figure 1 : Caractéristique  $I - U$  d'un élément non-linéaire  $X$ .

- A.1** À partir du graphe, déterminez la résistance  $R_{\text{on}}$  de l'élément  $X$  modélisant la branche supérieure de la caractéristique  $I - U$  ainsi que la résistance  $R_{\text{off}}$  pour la branche inférieure. La branche du milieu est décrite par l'équation :

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

Trouvez les valeurs des paramètres  $I_0$  et  $R_{\text{int}}$ .

L'élément  $X$  est branché en série (voir Fig. 2) avec une résistance  $R$ , une inductance  $L$  et une source de tension idéale de force électromotrice (f. é. m.)  $\mathcal{E}$ . On dit que le circuit est dans un état stationnaire si l'intensité du courant reste constante dans le temps, soit  $I(t) = \text{cste}$ .

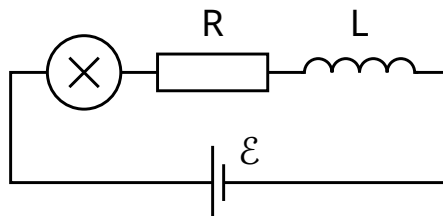


Figure 2 : Circuit avec l'élément  $X$ , la résistance  $R$ , l'inductance  $L$  et la source de tension de f. é. m.  $\mathcal{E}$ .

**A.2** Pour une valeur donnée de  $\mathcal{E}$  et pour  $R = 3,00 \Omega$ , combien y a-t-il d'états stationnaires pour le circuit de la Fig. 2? 1pt  
Qu'en est-il pour  $R = 1,00 \Omega$ ?

**A.3** Déterminez les valeurs de l'intensité du courant  $I_{\text{stat}}$  et de la tension  $U_{\text{stat}}$  pour l'élément non-linéaire  $X$  dans l'état stationnaire en prenant  $R = 3,00 \Omega$ ,  $L = 1,00 \mu\text{H}$  et  $\mathcal{E} = 15,0 \text{ V}$  pour le circuit de la figure 2. 0.6pt

Le circuit de la figure 2 est dans un état stationnaire avec  $I(t) = I_{\text{stat}}$ . Cet état stationnaire est dit stable si, après avoir subi une petite perturbation (augmentation ou diminution de l'intensité), l'intensité revient vers cet état stationnaire.

Si, au contraire, l'intensité continue à s'écartier de sa valeur stationnaire, cet état est dit instable.

**A.4** En utilisant les valeurs numériques de la question **A.3**, étudiez la stabilité de l'état stationnaire avec  $I(t) = I_{\text{stat}}$ . Est-il stable ou instable? 1pt

### Partie B. Éléments non-linéaires bi-stables en physique : Transmetteur radio (5 points)

Nous étudions maintenant une nouvelle configuration de circuit (voir Fig. 3). Cette fois, l'élément non-linéaire  $X$  est connecté en parallèle à un condensateur de capacité  $C = 1,00 \mu\text{F}$ . Ce bloc est ensuite connecté en série à une résistance  $R = 3,00 \Omega$  et à une source de tension constante idéale de f. é. m.  $\mathcal{E} = 15,0 \text{ V}$ . Le circuit présente alors des oscillations au cours desquelles l'état de l'élément non-linéaire  $X$  saute d'une branche de la caractéristique  $I - U$  à une autre au cours d'un cycle.

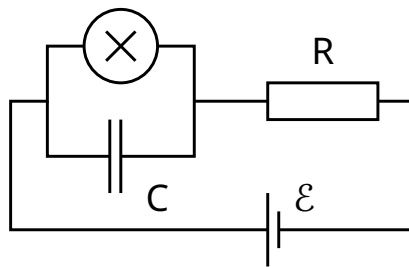


Figure 3 : Circuit avec l'élément  $X$ , le condensateur  $C$ , la résistance  $R$  et la source de tension de f. é. m.  $\mathcal{E}$ .

**B.1** Dessinez le cycle d'oscillation sur le graphe  $I - U$  en indiquant le sens suivi au cours du temps (horaire ou anti-horaire). Justifiez votre réponse par des équations et des schémas. 1.8pt

**B.2** Trouvez les expressions des durées  $t_1$  et  $t_2$  que le système passe sur chaque branche du graphe  $I - U$  durant un cycle d'oscillation. Déterminez leurs valeurs numériques. Trouvez la valeur numérique d'une période d'oscillation  $T$  en admettant que le temps nécessaire pour les sauts entre les branches du graphe  $I - U$  est négligeable. 1.9pt

**B.3** Estimez la puissance moyenne  $P$  dissipée par l'élément non-linéaire au cours d'une oscillation. Un ordre de grandeur est suffisant. 0.7pt

Le circuit de la figure 3 est utilisé pour construire un transmetteur radio. Pour cela, une des bornes de l'élément  $X$  est reliée à une des extrémités d'une antenne (un long fil rectiligne) de longueur  $s$ . Par contre, l'autre extrémité de l'antenne est libre. Dans l'antenne se forme une onde électromagnétique stationnaire. La célérité des ondes électromagnétiques dans l'antenne est la même que dans le vide. L'antenne du transmetteur fonctionne dans le mode fondamental du système dont la période  $T$  est celle de la question **B.2**.

**B.4** Quelle est la valeur optimale de  $s$ , en admettant qu'elle ne peut dépasser 1 km ? 0.6pt

### Partie C. Éléments non-linéaires bistables : Le neuristor (2 points)

Dans cette partie du problème, nous considérons l'application des éléments non-linéaires bistables à la modélisation de processus biologiques. Un neurone dans le cerveau humain a la propriété suivante : quand il est excité par un signal externe, il effectue une seule oscillation et retourne ensuite dans son état initial. Cette état de fait est appelé excitabilité. Grâce à cette propriété, des impulsions peuvent se propager dans le réseau de neurones couplés constituant le système nerveux. Une puce semi-conductrice construite pour imiter l'excitabilité et la propagation d'impulsions est appelée un *neuristor* (de neurone et transistor).

Nous essayons de modéliser un simple neuristor par un circuit incluant l'élément non-linéaire  $X$  étudié précédemment. Pour cela, la tension  $\mathcal{E}$  sur le circuit de la figure 3 est diminuée à la valeur de  $\mathcal{E}' = 12,0 \text{ V}$ . Les oscillations stoppent et le système atteint son état stationnaire. Ensuite, la tension est rapidement augmentée à la valeur de  $\mathcal{E} = 15,0 \text{ V}$  et, après une durée  $\tau$  (telle que  $\tau > T$ ),  $\mathcal{E}$  est ramenée une fois encore à la valeur  $\mathcal{E}'$  (voir Fig. 4). Apparaît alors une certaine valeur critique  $\tau_{\text{crit}}$  telle que le système présente un comportement différent pour  $\tau < \tau_{\text{crit}}$  et pour  $\tau > \tau_{\text{crit}}$ .

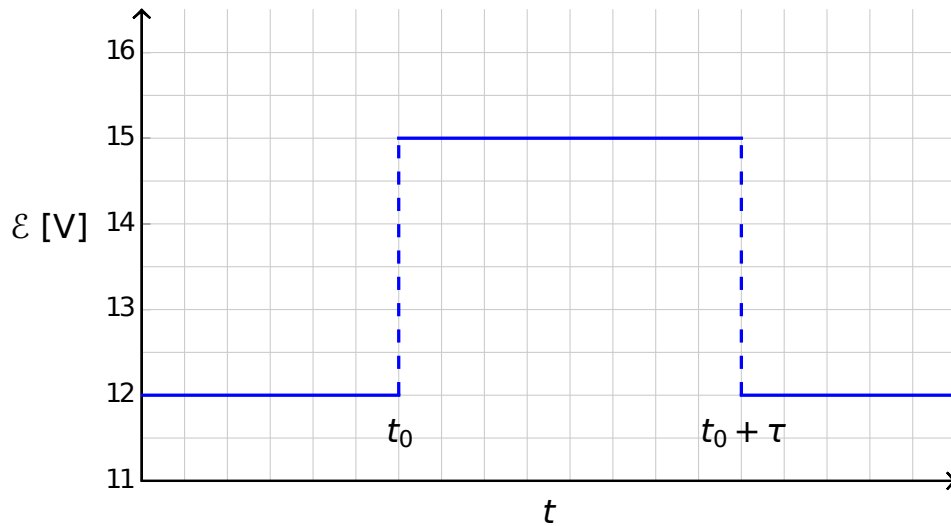


Figure 4 : Force électromotrice de la source de tension en fonction du temps.

- |            |  |       |
|------------|--|-------|
| <b>C.1</b> | Représentez les graphes de la dépendance temporelle du courant $I_X(t)$ de l'élément non-linéaire $X$ pour $\tau < \tau_{\text{crit}}$ et pour $\tau > \tau_{\text{crit}}$ . | 1.2pt |
| <b>C.2</b> | Déterminer l'expression et la valeur numérique du temps critique $\tau_{\text{crit}}$ pour lequel le scénario change.  | 0.6pt |
| <b>C.3</b> | Avec une valeur de $\tau = 1,00 \times 10^{-6}$ s, le circuit est-il un neuristor ?  | 0.2pt |