Μη Γραμμική Δυναμική σε Ηλεκτρικά Κυκλώματα (10 Μονάδες)

Παρακαλείστε να διαβάσετε τις Γενικές Οδηγίες στον ξεχωριστό φάκελο πριν ξεκινήσετε το πρόβλημα αυτό.

Εισαγωγή

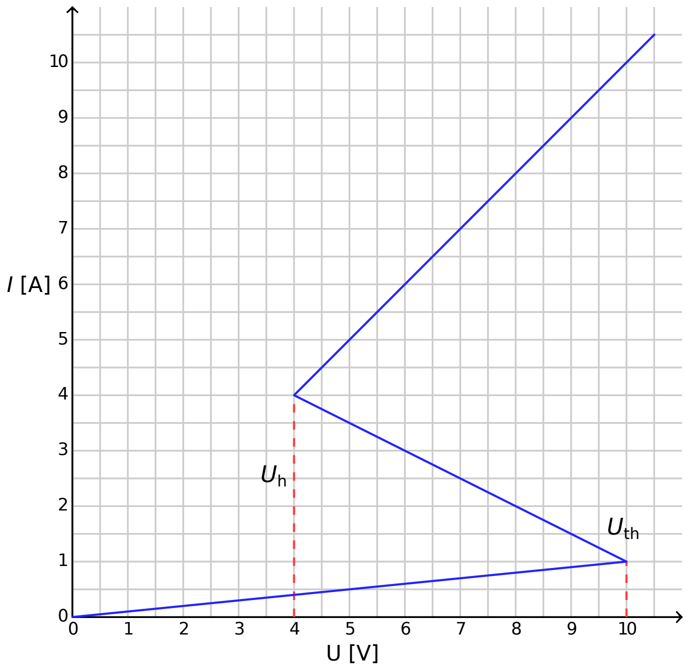
Τα δισταθή μη γραμμικά ημιαγώγιμα στοιχεία (π.χ. θυρίστορ) χρησιμοποιούνται ευρέως στα ηλεκτρονικά κυκλώματα ως διακόπτες ή και γεννήτριες ηλεκτρομαγνητικών ταλαντώσεων. Το πρωταρχικό πεδίο εφαρμογής των θυρίστορ ήταν ως στοιχεία ελέγχου εναλλασσόμενων ρευμάτων στα ηλεκτρονικά ισχύος π.χ. ανόρθωση εναλλασσόμενου ρεύματος (AC) σε συνεχές (DC) σε κλίμακα Megawatt. Ακόμα, τα δισταθή στοιχεία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μοντέλα μελέτης φαινομένων αυτο-οργάνωσης στη Φυσική (βλ. μέρος B του προβλήματος αυτού), στη Βιολογία (βλ. μέρος C) και σε άλλα πεδία της σύγχρονης επιστήμης μη γραμμικών φαινομένων.

Στόχοι

Να μελετήσετε τις καταστάσεις αστάθειας και τη μη τετριμμένη δυναμική κυκλωμάτων με στοιχεία των οποίων η χαρακτηριστική $I-V$ είναι μη γραμμική.Να ανακαλύψετε πιθανές εφαρμογές τέτοιων κυκλωμάτων στη μηχανολογία και στη μοντελοποίηση βιολογικών συστημάτων.

Μερος A. Στατικές Καταστάσεις και Καταστάσεις Αστάθειας. (3 Μονάδες)

Στο Σχήμα. 1 διακρίνεται η αποκαλούμενη **μορφή-S** (**S-shaped**) που είναι η χαρακτηριστική $I-V$ ενός μη γραμμικού στοιχείου X. Στην κλίμακα τάσεων μεταξύ $U_{\mathrm{h}} = 4.00\ \mathrm{V}$ (τάση συγκράτησης - holding voltage) και $U_{\mathrm{th}} = 10.0\ \mathrm{V}$ (τάση κατωφλίου - threshold voltage) βλέπουμε στη χαρακτηριστική $I-V$ ότι για κάθε τιμή της τάσης μπορεί να αντιστοιχούν περισσότερες απο μία τιμές του ρεύματος. Για απλότητα, το γράφημα του σχ. 1 επιλέχθηκε ώστε να είναι κατά τμήματα γραμμικό. Συγκεκριμένα, αν προεκταθεί η ανώτερη γραμμή θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αυτή η προσέγγιση συνιστά μια καλή περιγραφή ενός πραγματικού θυρίστορ.



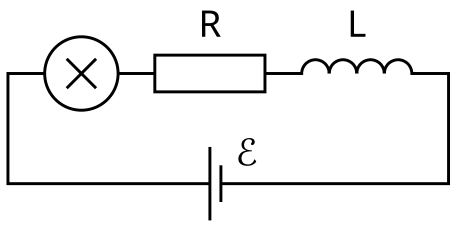
Εικόνα 1: Η χαρακτηριστική $I-V$ ενός μη γραμμικού στοιχείου X.

A.1 Χρησιμοποιώντας το γράφημα να προσδιορίστε την αντίσταη R_{on} του στοιχείου X στον πάνω κλάδο της χαρακτηριστικής $I-V$, και την αντίσταση R_{off} στο κατώτερο τμήμα της χαρακτηριστικής, αντίστοιχα. Το μεσαίο τμήμα του γραφήματος περιγράφεται από την εξίσωση **0.4pt**

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \tag{1}$$

Να προσδιορίσετε τις τιμές των παραμέτρων I_0 και R_{int}.

Το στοιχείο X είναι συνδεδεμένο σε σειρα (βλ. Εικ. 2) με έναν αντιστάτη αντίστασης R, ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L και μια ιδανική πηγή τάσης χωρίς εσωτερική αντίσταση ηλεκτρεγερτικής δύναμης $\mathcal{E}$. Θα λέμε ότι το κύκλωμα βρίσκεται σε στατική κατάσταση όταν η τιμή της έντασης του ρεύματος είναι σταθερή με το χρόνο, $I(t) = \text{const}$.



Εικόνα 2: Κύκλωμα που αποτελείται απο το στοιχείο X, αντιστάτη R, πηνίο L και πηγή $\mathcal{E}$.

A.2	Ποια είναι τα πιθανά πλήθη των στατικών καταστάσεων του κυκλώματος της Εικ. 2 για συγκεκριμένη τιμή του $\mathcal{E}$ και για $R = 3.00\ \Omega$; Πώς αλλάζει η απάντηση αν $R = 1.00\ \Omega$;	1pt

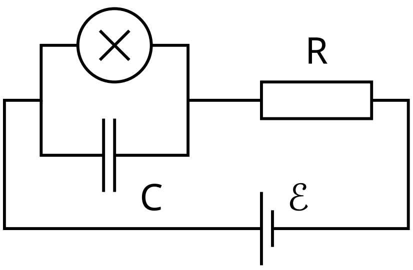
A.3	Έστω $R = 3.00\ \Omega, L = 1.00\ \mu\mathrm{H}$ και $\mathcal{E} = 15.0\ \mathrm{V}$ στο κύκλωμα της Εικ. 2. Προσδιορίστε τις τιμές του ρεύματος $I_{\text{stationary}}$ και της τάσης $V_{\text{stationary}}$ του μη γραμμικού στοιχείου X στη στατική κατάσταση.	0.6pt

Το κύκλωμα της Εικ. 2 βρίσκεται στην στατική κατάσταση με $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Θα λέμε ότι αυτή η στατική κατάσταση είναι ευσταθής, αν μετά από κάποια μικρή διαταραχή (θετική ή αρνητική) το ρεύμα επιστρέφει σε αυτή. Αν όμως το σύστημα συνεχίσει να απομακρύνεται από τη στατική κατάσταση, τότε αυτή καλείται ασταθής.

A.4	Να χρησιμοποιήσετε τις αριθμητικές τιμές του ερωτήματος **A.3** και να μελετήσετε την ευστάθεια της στατικής κατάστασης με $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Πώς μεταβάλλεται το $\delta I(t)$ με το χρόνο όταν $\delta I(0) > 0$ και πώς όταν $\delta I(0) < 0$; Η στατική κατάσταση είναι ευσταθής ή ασταθής;	1pt

Μέρος Β. Δισταθή μη γραμμικά στοιχεία στη Φυσική: Ραδιοπομπός (5 μονάδες)

Τώρα, θα μελετήσουμε ένα νέο κύκλωμα (Εικ. 3). Αυτή τη φορά το μη γραμμικό στοιχείο X είναι συνδεδεμένο παράλληλα με ένα πυκνωτή χωρητικότητας $C = 1.00\ \mu\mathrm{F}$. Το σύστημα συνδέεται σε σειρά με έναν αντιστάτη αντίστασης $R = 3.00\ \Omega$ και μια ιδανική πηγή $\mathcal{E} = 15.0\ \mathrm{V}$. Αποδεικνύεται ότι το κύκλωμα εκτελεί ταλαντώσεις με το μη γραμμικό στοιχείο X να εκτελεί άλμα από το ένα τμήμα της χαρακτηριστικής $I - V$ σε άλλο στη διάρκεια μιας περιόδου.



Εικόνα 3: Κύκλωμα που περιλαμβάνει το μη γραμμικό στοιχείο X, πυκνωτή C, αντιστάτη R και πηγή $\mathcal{E}$.

B.1	Να σχεδιάσετε τον κύκλο της ταλάντωσης στη γραφική παράσταση $I - V$, και να δείξετε τη φορά διαγραφής του (σύμφωνα ή αντίθετα της φοράς των δεικτών του ρολογιού). Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας χρησιμοποιώντας κατάλληλες σχέσεις και διαγράμματα.	1.8pt

B.2	Βρείτε εκφράσεις των χρονικών διαστημάτων t_1 και t_2 που το σύστημα παραμένει σε κάθε τμήμα της χαρακτηριστικής $I-V$ στη διάρκεια μίας περιόδου. Προσδιορίστε τις αριθμητικές τιμές των διαστημάτων αυτών. Βρείτε την αριθμητική τιμή της περιόδου ταλάντωσης T , υποθέτοντας ότι η διάρκεια του άλματος μεταξύ των τμημάτων του γραφήματος $I-V$ είναι αμελητέα.	1.9pt

B.3	Εκτιμήστε τη μέση Ισχύ P του μη γραμμικού στοιχείου κατά τη διάρκεια μίας περιόδου. Η απάντησή σας θα είναι επαρκής με τον προσδιορισμό της τάξης μεγέθους.	0.7pt

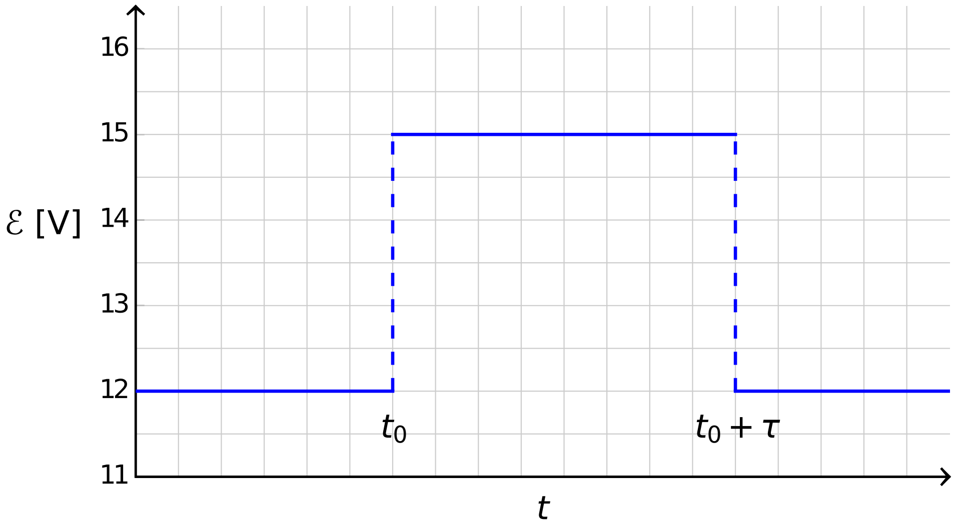
Το κύκλωμα της Εικ. 3 χρησιμοποιείται για τη δημιουργία ενός Ραδιοπομπού. Για την χρήση αυτή το στοιχείο X στερεώνεται στο ένα άκρο μιας γραμμικής κεραίας (ευθύγραμμο καλώδιο μεγάλου μήκους) μήκους s. Το άλλο άκρο του καλωδίου παραμένει ελεύθερο. Στην κεραία παράγεται ένα στάσιμο ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Η ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων κατά μήκος της κεραίας είναι ίδια με εκείνη στο κενό. Ο πομπός λειτουργεί στη θεμελιώδη συχνότητα του συστήματος που έχει την περίοδο T του ερωτήματος **B.2**.

B.4	Ποια είναι η βέλτιστη τιμή του s, υποθέτοντας ότι δε μπορεί να υπερβαίνει το $1\ \mathrm{km}$;	0.6pt

Μέρος C. Δισταθή μη γραμμικά στοιχεία στη Βιολογία: neuristor (2 Μονάδες)

Στο μέρος αυτό του προβλήματος θα εξετάσουμε μια εφαρμογή των δισταθών μη γραμμικών στοιχείων στη μοντελοποίηση βιολογικών διαδικασιών. Στον ανθρώπινο εγκέφαλο ένας νευρώνας έχει την ακόλουθη ιδιότητα: όταν διεγερθεί από ένα εξωτερικό ερέθισμα (σήμα) εκτελεί μία και μοναδική πλήρη ταλάντωση και ακολούθως επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση.Το χαρακτηριστικό αυτό ονομάζεται διεγερσιμότητα. Χάρη στην ιδιότητα αυτή είναι δυνατό να διαδίδονται παλμοί σε ένα δίκτυο συζευγμένων νευρώνων που αποτελούν το νευρικό σύστημα. Ένα ημιαγώγιμο τσιπ που σχεδιάστηκε για να μιμείται τη διεγερσιμότητα και τη διάδοση παλμών ονομάζεται *neuristor* (από τις λέξεις νευρώνας - neuron και τρανζίστορ - transistor).

Θα επιχειρήσουμε να μοντελοποιήσουμε ένα απλό *neuristor* χρησιμοποιώντας ένα κύκλωμα το οποίο περιλαμβάνει το μη γραμμικό στοιχείο X που μελετήσαμε προηγουμένως. Στο μοντέλο αυτό η τάση της πηγής στην Εικ. 3 ελαττώνεται στην τιμή $\mathcal{E}' = 12.0\ \mathrm{V}$. Οι ταλαντώσεις σταματούν και το σύστημα φτάνει στην στατική του κατάσταση. Τότε η τάση αυξάνεται πολύ γρήγορα και παίρνει την τιμή $\mathcal{E} = 15.0\ \mathrm{V}$, και μετά από ένα χρονικό διάστημα τ (όπου $\tau < T$) λαμβάνει ξανά την τιμή $\mathcal{E}'$ (βλ. Εικ. 4). Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια κρίσιμη τιμή $\tau_{\mathrm{crit.}}$, για την οποία το σύστημα επιδεικνύει ποιοτικά διαφορετική συμπεριφορά για $\tau < \tau_{\mathrm{crit}}$ και για $\tau > \tau_{\mathrm{crit}}$.



Εικόνα 4: Τάση της πηγής σε σχέση με το χρόνο.

C.1	Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις της έντασης του ρεύματος $I_X(t)$ που διαρρέει το μη γραμμικό στοιχείο X για $\tau < \tau_{\mathrm{crit}}$ και για $\tau > \tau_{\mathrm{crit}}$, συναρτήσει του χρόνου	1.2pt

C.2	Βρείτε μια μαθηματική έκφραση και την αριθμητική τιμή του κρίσιμου χρόνου τ_{crit} όπου παρατηρείται αλλαγή συμπεριφοράς.	0.6pt

C.3	Το κύκλωμα με $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s λειτουργεί ως neuristor;	0.2pt