

Нелинейная динамика в электрических цепях (10 баллов)

Прежде чем приступить к выполнению этого задания, ознакомьтесь с общими указаниями, находящимися в отдельном конверте.

Введение

Бистабильные нелинейные полупроводниковые элементы (например, тиристоры) широко используются в электронике в качестве переключателей и генераторов электромагнитных колебаний. Основной областью применения тиристоров является управление переменными токами в силовой электронике, например преобразование мегаваттных переменных токов в постоянные. Бистабильные элементы могут также использоваться в качестве модельных систем для явлений самоорганизации в физике (эта тема рассматривается в части В этой задачи), в биологии (часть С) и в других областях современной нелинейной динамики.

Цели

Изучим неустойчивости и нетривиальные динамические свойства электрических цепей, содержащих элементы с нелинейными $I - V$ (вольт-амперными) характеристиками. Рассмотрим возможные применения подобных схем в инженерном деле и в моделировании биологических систем.

Часть А. Стационарные состояния и неустойчивости (3 балла)

На Рис. 1 показана так называемая **S-образная** $I - V$ (вольт-амперная) характеристика нелинейного элемента X . В диапазоне напряжений между $U_h = 4.00 V$ (сдерживающее напряжение) и $U_{th} = 10.0 V$ (пороговое напряжение) эта $I - V$ (вольт-амперная) характеристика многозначна. Ради простоты вычислений допустим, что график на Рисунке 1 является кусочно-линейной (каждая ветвь представляет собой отрезок прямой) функцией. Продолжение прямой верхней ветви проходит через начало координат. В этом приближении свойства реальных тиристоров описываются достаточно хорошо.

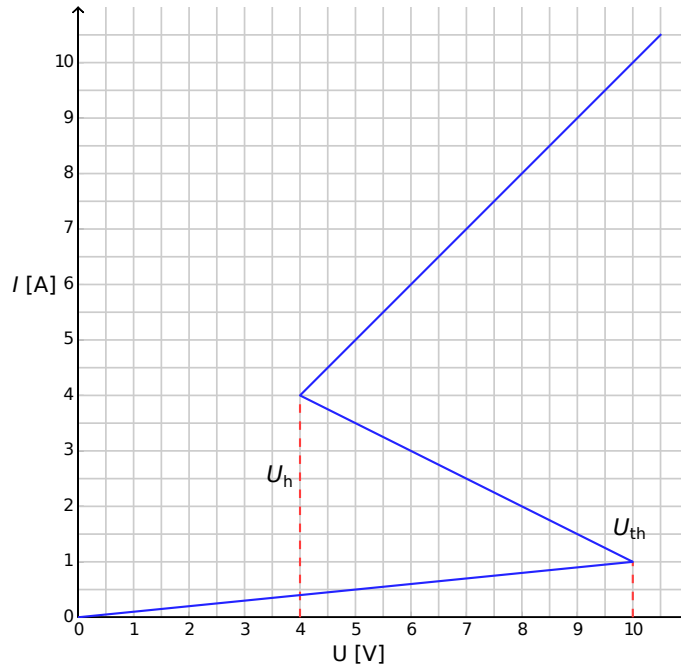


Рисунок 1 - Вольт-амперная ($I - V$) характеристика нелинейного элемента X .

- A.1** Используя приведенный график, определите сопротивления R_{on} элемента X на верхней ветви $I - V$ (вольт-амперной) характеристики и R_{off} на нижней ветви соответственно. Средняя ветвь описывается уравнением 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

Найдите значения параметров I_0 и R_{int} .

Элемент X соединяют последовательно (Рисунок 2) с резистором R , катушкой индуктивности L и идеальным источником напряжения \mathcal{E} . Если сила тока постоянна во времени, $I(t) = \text{const}$, то говорят, что электрическая цепь находится в стационарном состоянии.

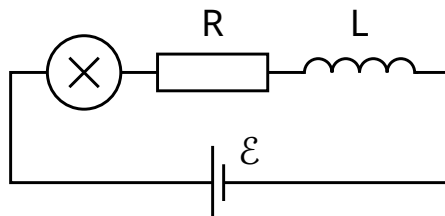


Рисунок 2 - Электрическая цепь с элементом X , резистором R , катушкой индуктивности L и источником напряжения \mathcal{E} .

A.2 Сколько возможных стационарных состояний может иметь электрическая цепь на Рисунке 2 при фиксированном значении \mathcal{E} и $R = 3.00 \Omega$? Как изменится ответ при $R = 1.00 \Omega$? 1pt

A.3 Пусть в электрической цепи, показанной на Рисунке 2, $R = 3.00 \Omega$, $L = 1.00 \mu\text{H}$ и $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$. Определите значения сила тока $I_{\text{stationary}}$ и напряжения $V_{\text{stationary}}$ на нелинейном элементе X в стационарном состоянии. 0.6pt

Электрическая цепь на Рисунке 2 находится в стационарном состоянии с $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Если при малом изменении силы тока (возрастании или убывании) сила тока возвращается к стационарному значению, то такое состояние является стабильным. Если система уходит от стационарного состояния, то это состояние является нестабильным.

A.4 Используя численные значения, полученные в **A.3**, проанализируйте стабильность этого стационарного состояния с $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Является ли это состояние стабильным или нестабильным? 1pt

Часть В. Бистабильные нелинейные элементы в физике: радиопередатчик (5 баллов)

В этой части мы исследуем новую электрическую цепь (Рисунок 3). В этот раз нелинейный элемент X соединен с конденсатором емкостью $C = 1.00 \mu\text{F}$ параллельно. К ним последовательно подключен резистор с сопротивлением $R = 3.00 \Omega$ и идеальный источник постоянного напряжения $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$. Оказывается, что в этой цепи возникают колебания, характеризующиеся тем, что нелинейный элемент X переходит скачкообразно с одной ветви $I - V$ характеристики на другую и обратно в течение одного периода колебаний.

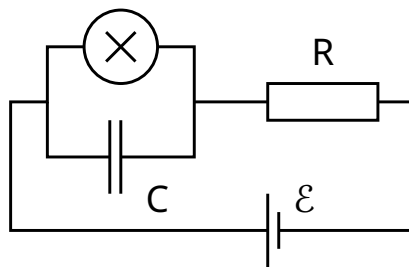


Рисунок 3 - Электрическая цепь, состоящая из элемента X , конденсатора C , резистора R и источника напряжения \mathcal{E} .

B.1 Изобразите цикл колебания на графике $I - V$ (вольт-амперной) характеристики, укажите направление колебаний (по часовой или против часовой стрелки). Обоснуйте ваш ответ уравнениями и схематическими рисунками. 1.8pt

B.2 Найдите выражения для времен t_1 и t_2 , в течение которых система находится на каждой из ветвей графика $I - V$ (вольт-амперной) характеристики за время одного периода колебаний. Рассчитайте их численные значения. Найдите численное значение периода колебаний T , полагая, что временем, необходимым для скачкообразного перехода между ветвями графика $I - V$ (вольт-амперной) характеристики, можно пренебречь. 1.9pt

B.3 Оцените среднюю мощность P , выделяющуюся на нелинейном элементе в течение одного периода колебаний. Достаточно привести порядок величины. 0.7pt

Электрическая цепь, показанная на Рисунке 3, используется для создания радиопередатчика. Для этого элемент X подключается к одному из концов линейной антенны (длинного прямого провода), имеющей длину s . Другой конец этого провода является свободным. В этой антенне формируется стоячая волна. Скорость распространения электромагнитных волн в антенне такая же, как в вакууме. Передатчик генерирует волну основной гармоники с периодом, найденным в пункте B.2.

B.4 Каково оптимальное значение s , если считать, что оно не может быть больше 1 km? 0.6pt

Часть В. Бистабильные нелинейные элементы в биологии: нейристор (2 points)

В этой части задачи мы рассмотрим применение бистабильных нелинейных элементов к моделированию биологических процессов. Нейрон в человеческом мозге обладает следующим свойством: при возбуждении внешним сигналом он совершает одно колебание, а затем возвращается в исходное состояние. Эта функция называется возбудимостью. Благодаря этому свойству импульсы могут распространяться в сети связанных нейронов, образующих нервные системы. Полупроводниковый чип, предназначенный для имитации возбудимости и распространения импульса, называется нейристором (от нейрона и транзистора).

Используя электрическую схему с исследованным ранее нелинейным элементом X , попробуем смоделировать простой нейристор. С этой целью напряжение \mathcal{E} в схеме на Рисунке 3 уменьшается до значения $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$. Колебания прекращаются и система переходит в свое стационарное состояние. Затем напряжение скачком увеличивается до значения $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ и, спустя некоторое время τ ($\tau < T$) уменьшается до значения \mathcal{E}' (Рисунок 4). Оказывается, что существует определенное критическое значение τ_{crit} , и поведение системы качественно отличается при $\tau < \tau_{\text{crit}}$ и $\tau > \tau_{\text{crit}}$.

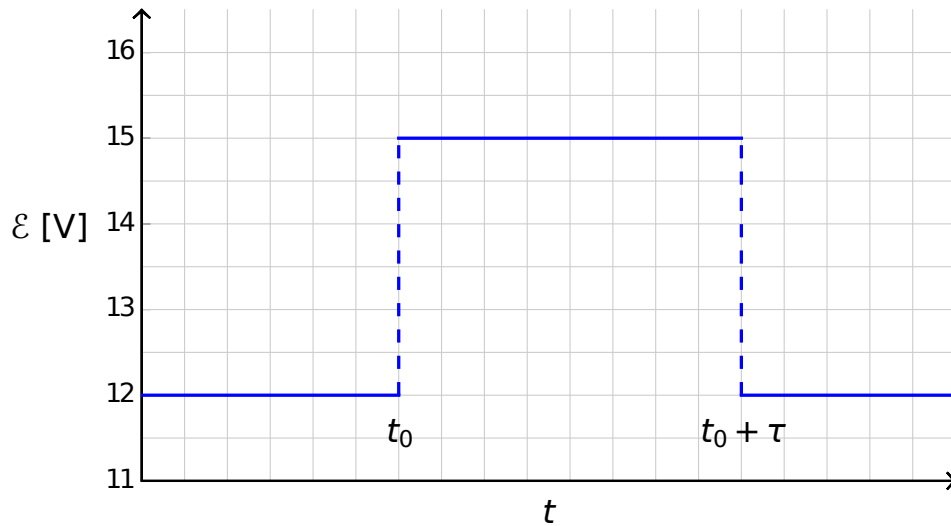


Рисунок 4 - Зависимость напряжения источника от времени.

C.1 Нарисуйте схематические графики временной зависимости силы тока $I_X(t)$ через нелинейный элемент X при $\tau < \tau_{\text{crit}}$ и $\tau > \tau_{\text{crit}}$. 1.2pt

C.2 Найдите выражение для критического времени τ_{crit} и его численное значение, при котором реализуется описанная ситуация. 0.6pt

C.3 Является ли схема с $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s нейристором? 0.2pt