

Нелинейная динамика в электрических цепях (10 баллов)

Прежде чем приступить к выполнению этого задания прочитайте инструкцию.

Введение

Бистабильные нелинейные полупроводниковые элементы (например, тиристоры) широко используются в электронике в качестве переключателей и генераторов электромагнитных колебаний. С помощью тиристоров обычно управляют переменными токами в силовой электронике, например преобразуют мегаваттные переменные токи в постоянные. Бистабильные элементы также могут быть модельными системами для изучения самоорганизации в физике (это рассматривается в части В этой задачи), в биологии (часть С) и в других областях современной нелинейной физики.

Goals

В этой задаче мы изучим неустойчивости и нетривиальные динамические свойства электрических цепей, содержащих элементы с нелинейными вольт-амперными характеристиками. Мы также рассмотрим возможные применения подобных схем в электронике и в моделировании биологических систем.

Часть А. Стационарные состояния и неустойчивости (3 балла)

На рисунке 1 показана так называемая **S-образная** вольт-амперная характеристика нелинейного элемента X . В диапазоне напряжений между $U_h = 4.00$ В (удерживаемое напряжение) и $U_{th} = 10.0$ В (пороговое напряжение). Эта вольт-амперная характеристика многозначна. Ради простоты вычислений будем считать, что график на рисунке 1 является кусочно-линейной функцией (каждая ветвь представляет собой отрезок). Продолжение верхней ветви графика проходит через начало координат. Это приближение хорошо описывает реальные тиристоры.

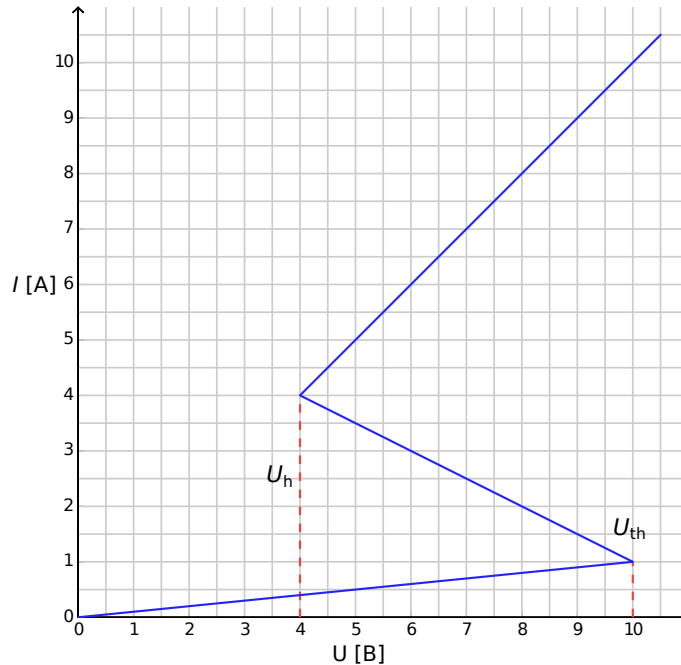


Рисунок 1: Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента X .

- A.1** С помощью графика определите сопротивление R_{on} элемента X на верхней ветви вольт-амперной характеристики и R_{off} на нижней ветви соответственно. Средняя ветвь описывается уравнением 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

Найдите значения параметров I_0 и R_{int} .

Элемент X соединен последовательно (рисунок 2) с резистором R , катушкой индуктивности L и идеальным источником напряжения \mathcal{E} . Если электрическая цепь находится в стационарном состоянии, то сила тока постоянна во времени, $I(t) = \text{const}$.

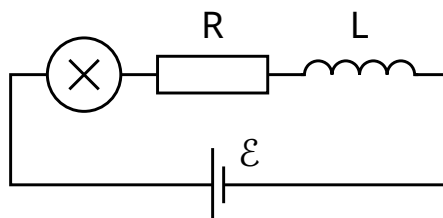


Рисунок 2: Электрическая цепь с элементом X , резистором R , катушкой индуктивности L и источником напряжения \mathcal{E} .

A.2 Сколько возможных стационарных состояний может иметь электрическая цепь, изображенная на рисунке 2, при некотором заданном значении \mathcal{E} и при $R = 3.00 \Omega$? Каким будет ответ при $R = 1.00 \Omega$ Ом? 1pt

A.3 Пусть в электрической цепи, показанной на рисунке 2, $R = 3.00 \Omega$, $L = 1.00$ мкГн и $\mathcal{E} = 15.0$ В. Определите значения сила тока $I_{\text{stationary}}$ и напряжения $V_{\text{stationary}}$ на нелинейном элементе X в стационарном состоянии. 0.6pt

Пусть электрическая цепь на рисунке 2 находится в стационарном состоянии с $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Стационарное состояние называется *устойчивым*, если после небольшого изменения тока (увеличения или уменьшения) значение тока возвращается к стационарному состоянию. Однако, если система продолжает уходить от стационарного состояния, то оно называется *неустойчивым*.

A.4 Используйте численные значения заданные в **A.3** и изучите стабильность стационарного состояния с $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Является ли стационарное состояние устойчивым или неустойчивым? 1pt

Часть В. Бистабильные нелинейные элементы в физике: радиопередатчик (5 баллов)

В этой части мы исследуем новую схему электрической цепи (рисунок 3). Нелинейный элемент X соединен с конденсатором емкостью $C = 1.00$ мкФ параллельно. Этот блок включен последовательно с резистором $R = 3.00 \Omega$ и идеальным источником постоянного напряжения $\mathcal{E} = 15.0$ В. Оказывается, что в этой цепи возникают колебания. За время одного периода колебаний свойства элемента X "перескакивают" по вольт-амперной характеристике с одной ветви на другую.

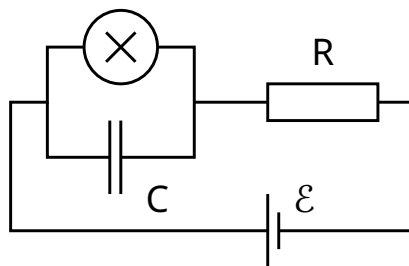


Рисунок 3: Электрическая цепь, состоящая из элемента X , конденсатора C , резистора R и источника напряжения \mathcal{E} .

B.1 Нарисуйте один период колебания на вольт-амперной характеристике, в том числе, укажите направление колебания (по часовой или против часовой стрелки). Обоснуйте свой ответ с помощью уравнений и схем. 1.8pt

B.2 Найдите формулы для времён t_1 и t_2 , в течение которых система находится на каждой из ветвей вольт-амперной характеристики во время периода колебаний. Определите их численные значения. Найдите численное значение периода колебаний T , полагая, что временем, необходимым для скачкообразного перехода между ветвями вольт-амперной характеристики, можно пренебречь. 1.9pt

B.3 Оцените среднюю мощность P , рассеянную нелинейным элементом в течение одного колебания. Достаточно привести порядок величины. 0.7pt

Электрическая цепь, показанная на рисунке 3, может использоваться для создания радиопередатчика. Для этого элемент X подключается к одному из концов антенны длины s (антенна — это длинный прямой провод). Противоположный конец провода свободный. В антенне образуется стоячая электромагнитная волна. Скорость электромагнитной волны в антенне такая же, как и в вакууме. Передатчик настроен на основную гармонику системы, у которой период T (из пункта **B.2**).

B.4 Каково оптимальное значение s , если считать, что оно не может быть больше 1 км? 0.6pt

Часть С. Бистабильные нелинейные элементы в биологии: нейристор (2 балла)

В этой части задачи мы рассмотрим применение бистабильных нелинейных элементов к моделированию биологических процессов. Нейрон в человеческом мозге обладает следующим свойством: при возбуждении внешним сигналом он совершает одно колебание, а затем возвращается в исходное состояние. Это свойство называется возбудимостью. Благодаря этому свойству импульсы могут распространяться в сети связанных нейронов, которые образуют нервные системы. Полупроводниковый чип, предназначенный для имитации возбудимости и распространения импульса, называется нейристором.

Попробуем смоделировать простой нейристор, используя электрическую схему с исследованным ранее нелинейным элементом X . Для этого напряжение \mathcal{E} в схеме на рисунке 3 уменьшается до $\mathcal{E}' = 12.0$ В. Колебания прекращаются и система переходит в свое стационарное состояние. Затем напряжение быстро увеличивается до $\mathcal{E} = 15.0$ В и, спустя некоторое время (

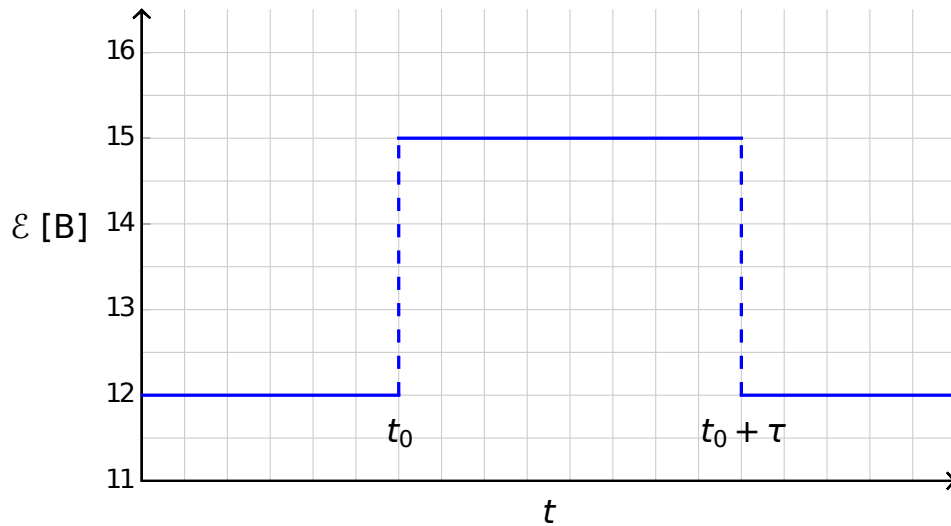


Рисунок 4: Напряжение источника как функция времени.

- | | | |
|------------|---|-------|
| C.1 | Схематически нарисуйте графики временной зависимости тока $I_X(t)$ через нелинейный элемент X для $\tau < \tau_{\text{crit}}$ и для $\tau > \tau_{\text{crit}}$. | 1.2pt |
| C.2 | Найдите выражение для критического времени τ_{crit} и его численное значение, при котором происходит изменение поведения системы. | 0.6pt |
| C.3 | Является ли схема нейристором при $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ с? | 0.2pt |