

## Nichtlineare Dynamik in Stromkreisen (10 Punkte)

Lies die Anweisungen in dem separaten Umschlag, bevor Du mit dieser Aufgabe beginnst.

### Einleitung

Bistabile nichtlineare halbleitende Komponenten (z.B. Thyristoren) finden eine breite Anwendung in der Technik. Sie werden z.B. als Schalter eingesetzt oder als Erzeuger von elektromagnetischen Schwingungen. Das Hauptanwendungsfeld dieser Thyristoren liegt jedoch in der Regelung von Wechselströmen in der Leistungselektronik, z.B. bei der Umwandlung von Wechsel- zu Gleichstrom in Leistungsbereichen von Megawatt. Bistabile Komponenten können aber auch als Modellsysteme für Selbstorganisationsphänomene in der Physik (dies wird in Teil B der Aufgaben thematisiert), Biologie (siehe Teil C) und anderen Feldern der Erforschung nichtlinearer Systeme genutzt werden.

### Ziele

Untersuchung der Instabilitäten und nicht-trivialen Dynamik von Stromkreisen mit nichtlinearen  $I - U$ -Charakteristiken. Untersuchung möglicher Anwendungen solcher Stromkreise in der Modellierung biologischer Systeme.

### Aufgabenteil A. Stationäre Zustände und Instabilitäten (3 Punkte)

Abb. 1 zeigt die sogenannten **S-förmigen**  $I - U$  Eigenschaften eines nichtlinearen Elementes  $X$ . In dem Bereich von  $U_G = 4,00 \text{ V}$  (Grundspannung) und  $U_S = 10,0 \text{ V}$  (Schwellenspannung) besitzt  $I - U$  mehrere Funktionswerte. Der Einfachheit halber ist der Graph in Abb.1 stückweise linear (jeder Zweig ist eine gerade Strecke). Insbesondere geht die Verlängerung des oberen Zweiges durch den Ursprung. Diese Näherung gibt eine gute Beschreibung von Thyristoren.

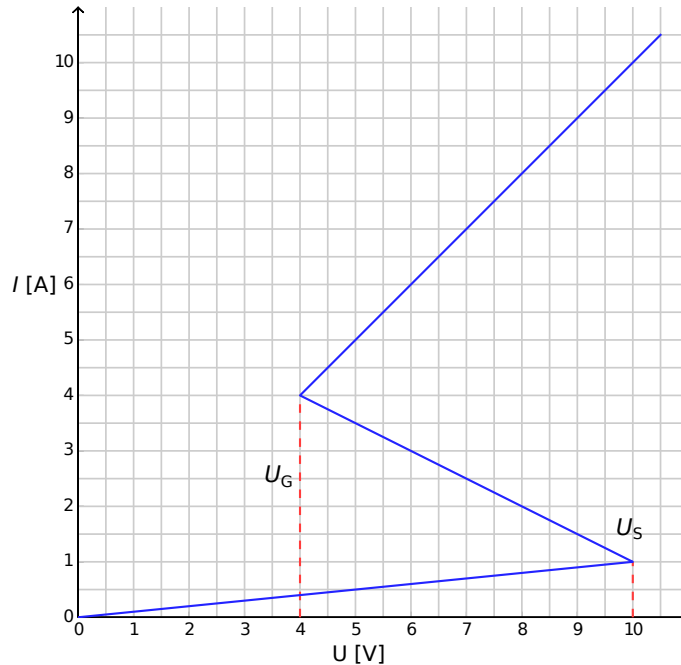


Abbildung 1:  $I - U$ -Charakteristik des nichtlinearen Elementes  $X$ .

- A.1** Bestimme mit Hilfe des Graphen zuerst den Widerstand  $R_{on}$  des Elementes  $X$  im oberen Zweig und den Widerstand  $R_{off}$  im unteren Zweig der  $I - U$ -Charakteristik. 0.4pt  
Der mittlere Zweig wird durch folgende Gleichung beschrieben

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{int}}. \quad (1)$$

Bestimme die Werte der Parameter  $I_0$  und  $R_{int}$ .

Das Element  $X$  wird nun in Reihe (siehe Abb.2) mit einem Widerstand  $R$ , einer Spule der Induktivität  $L$  und einer idealen Spannungsquelle der Spannung  $\mathcal{E}$  (die Bezeichnung  $\mathcal{E}$  kommt von engl. *Electromotive Force - EMF*) geschaltet. Man sagt, dass sich der Stromkreis in einem stationären Zustand befindet, falls die Stromstärke zeitunabhängig ist,  $I(t) = \text{const.}$

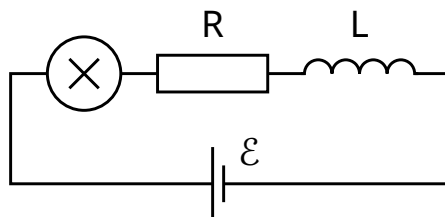


Abbildung 2: Stromkreis mit Element  $X$ , Widerstand  $R$ , Spule  $L$  und Spannungsquelle  $\mathcal{E}$ .

**A.2** Bestimme die mögliche Anzahlen an stationären Zuständen die der Stromkreis in Abb. 2 für einen festen Wert von  $\mathcal{E}$  und für  $R = 3,00 \Omega$  annehmen kann. Wie ändert sich das Ergebniss falls  $R = 1,00 \Omega$  ist? 1pt

**A.3** Es seien  $R = 3,00 \Omega$ ,  $L = 1,00 \mu\text{H}$  und  $\mathcal{E} = 15,0 \text{ V}$  in dem Stromkreis aus Abb. 2. Bestimme die durch das nichtlineare Element  $X$  fließende Stromstärke  $I_{\text{stationär}}$  im stationären Zustand sowie die in diesem Fall über dem Element abfallende Spannung  $U_{\text{stationär}}$ . 0.6pt

Der Stromkreis in Abb. 2 ist in einem stationären Zustand  $I(t) = I_{\text{stationär}}$ . Dieser Zustand wird stabil genannt, wenn die Stromstärke nach einer kleinen Störung (Erhöhung oder Verringerung der Stromstärke) wieder zu dem stationären Zustand zurückkehrt. Wenn sich das System nach der Störung weiter von dem stationären Zustand entfernt, wird es als instabil bezeichnet.

**A.4** Benutze die numerischen Werte aus Aufgabe **A.3** und untersuche damit die Stabilität des stationären Zustands mit  $I(t) = I_{\text{stationär}}$ . Ist der stationäre Zustand stabil oder instabil? 1pt

## Aufgabenteil B. Bistabile, nichtlineare Elemente in der Physik: Radiosender (5 Punkte)

Als nächstes untersuchst Du eine neue Konfiguration des Stromkreises (siehe Abb. 3). Diesmal ist das nichtlineare Element  $X$  in Parallelschaltung mit einem Kondensator der Kapazität  $C = 1,00 \mu\text{F}$  verbunden. Dieser Block ist dann in Reihe mit einem Widerstand  $R = 3,00 \Omega$  und einer idealen Spannungsquelle mit konstanter Spannung  $\mathcal{E} = 15,0 \text{ V}$  geschaltet. Es zeigt sich, dass der Stromkreis Schwingungen ausführt, wobei das nichtlineare Element  $X$  während einer Schwingungsperiode von einem Zweig im  $I-U$ -Diagramm auf einen anderen Zweig springt.

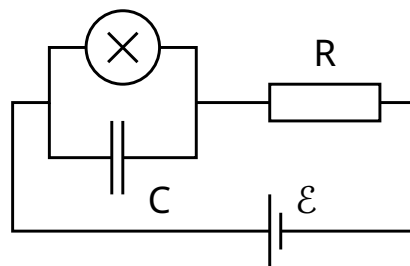


Abbildung 3: Stromkreis mit Element  $X$ , Kondensator  $C$ , Widerstand  $R$  und Spannungsquelle  $\mathcal{E}$ .

**B.1** Zeichne den Verlauf einer Schwingungsperiode einschließlich Richtungsangaben (im oder gegen den Uhrzeigersinn) in das  $I-U$ -Diagramm. Begründe Deine Antwort mit Gleichungen und/oder Skizzen. 1.8pt

**B.2** Finde Ausdrücke für die Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  welche das System auf den jeweiligen Zweigen des  $I - U$ -Diagramms während einer Schwingungsperiode verbringt. Bestimme numerische Werte für diese Zeiten. Finde die numerischen Werte für die Schwingungsdauer  $T$  unter der Annahme, dass die Zeit für die Sprünge zwischen den Zweigen des  $I - U$  Graphen vernachlässigbar ist. 1.9pt

**B.3** Schätze die Durchschnittsleistung  $P$ , die durch das nichtlineare Element während eines Durchlaufes umgesetzt wird ab. Eine größenordnungsmäßige Abschätzung ist ausreichend. 0.7pt

Der Stromkreis in Abb. 3 wird benutzt, um einen Radiosender zu bauen. Hierfür wird das Element  $X$  an das Ende einer gerade Antenne der Länge  $s$  angebracht. Das andere Ende der Antenne ist frei. In der Antenne bilden sich stehende elektromagnetische Wellen aus. Die Geschwindigkeit der Wellen entlang der Antenne ist die gleiche wie im Vakuum. Der Sender nutzt die Schwingungsdauer  $T$  des Systems aus Aufgabe **B.2**.

**B.4** Was ist der optimale Wert für  $s$  unter der Annahme, dass  $s$  nicht größer als 1 km sein darf? 0.6pt

### Teil C. Bistabile, nichtlineare Elemente in der Biologie: Der Neuristor (2 Punkte)

In diesem Abschnitt der Aufgabe widmen wir uns der Anwendung bistabiler, nichtlinearer Elemente für das Modellieren biologischer Prozesse. Ein Neuron im menschlichen Gehirn hat folgende Eigenschaften: Bei Stimulation durch ein externes Signal vollzieht das Neuron eine einzige Oszillation und kehrt dann zu seinem Ausgangszustand zurück. Diese Eigenschaft wird Anregbarkeit genannt. Durch diese können Nervenpulse in dem Netzwerk gekoppelter Neuronen, dem Nervensystem, weitergeleitet werden. Ein Halbleiterchip, entworfen um diese Erregung zu imitieren, wird Neuristor genannt (Zusammensetzung aus Neuron und Transistor).

Ein einfacher Neuristor soll nun durch den gerade untersuchten Stromkreis mit dem nichtlinearen Element  $X$  modelliert werden. Hierzu wird die Spannung  $\mathcal{E}$  in dem Stromkreis aus Abb. 3 auf den Wert  $\mathcal{E}' = 12,0 \text{ V}$  gesenkt. Die Schwingungen stoppen, und das System erreicht einen stationären Zustand. Danach wird die Spannung in kurzer Zeit auf einen Wert  $\mathcal{E} = 15,0 \text{ V}$  erhöht, und nach einer Zeit  $\tau$  wieder zurück auf den Wert

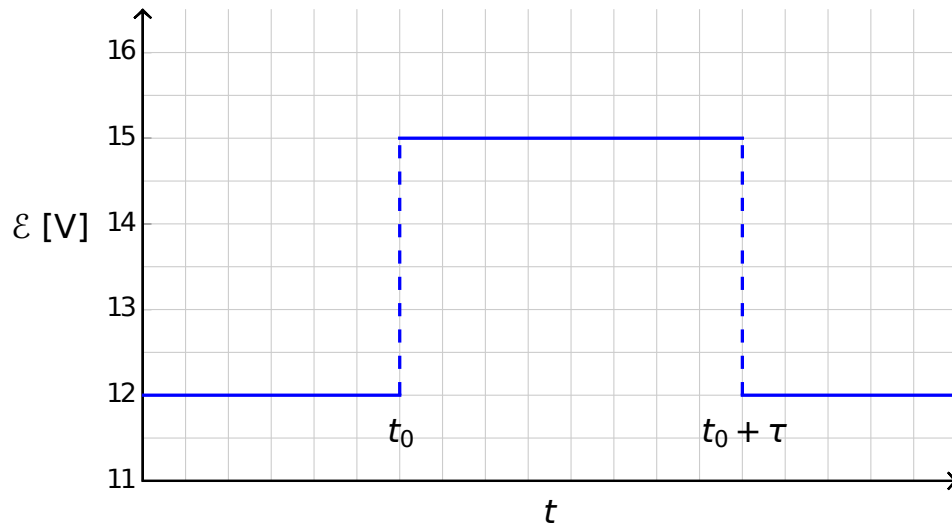


Abbildung 4: Spannung der Spannungsquelle als Funktion der Zeit.

- |            |  |       |
|------------|--|-------|
| <b>C.1</b> | Skizziere die Graphen der Zeitabhängigkeit des Stroms $I_X(t)$ des nichtlinearen Elementes $X$ für $\tau < \tau_{\text{krit}}$ und für $\tau > \tau_{\text{krit}}$ . | 1.2pt |
| <b>C.2</b> | Finde einen Ausdruck und den numerischen Wert für die kritische Zeit $\tau_{\text{krit}}$ , bei welchem sich das Verhalten ändert.                                   | 0.6pt |
| <b>C.3</b> | Stellt der Stromkreis mit $\tau = 1,00 \times 10^{-6}$ s einen Neuristor dar?  | 0.2pt |