

## 電路的非線性動力學 (10 分)

開始作答本題前，細讀另一個信封內的一般指引。

### 簡介

雙穩態非線性半導體元件 (矽控管) 常用於電路，如開關或電磁振盪的產生器。矽控管的主要應用是控制百萬瓦的交流電流把 AC 整流至 DC。雙穩態元件亦可作物理模型用於自組織現象 (如 B 部分)、生物 (C 部分) 及其它現代非線性科學。

### 目標

用非線性 I-V 特性研究電路的非穩及異常動力學。去發現此種電路可能的工程應用，及作為生物系統的模式。

### A 部— 穩態及不穩定性 (3 分)

圖 1 顯示非線性元件  $X$  的 **S-形**  $I - V$  特性曲線。在電壓  $4.00\text{V}$ - $10.0\text{V}$  範圍內，電流可以是電壓的多值函數， $U_h$  是保持電壓， $U_{th}$  是臨界電壓，於此圖 1 的曲線每段簡化成直線。特別地，如果上方線段伸延，可到達原點。這個近似是矽控管 (元件  $X$ ) 的良好描述。

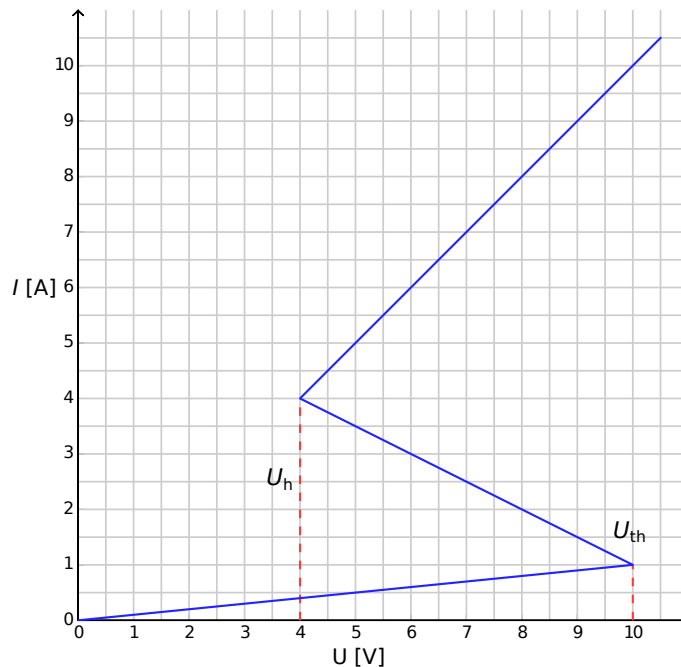


圖 1：非線性元件  $X$  的  $I - V$  特性

- A.1** 從圖 1 元件  $X$  的  $I - V$  特性，決定上線段的電阻  $R_{on}$ ，下線段的  $R_{off}$ ，中線段的  $R_{int}$  由公式 (1) 決定 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{int}}. \quad (1)$$

計算出  $I_0$  和  $R_{int}$ 。

現在，元件  $X$  與電阻  $R$  電感  $L$  及理想電源  $\mathcal{E}$  成串聯，如圖 2。有人說，如果電流保持不變  $I(t) = \text{常數}$ ，此電路是穩態。

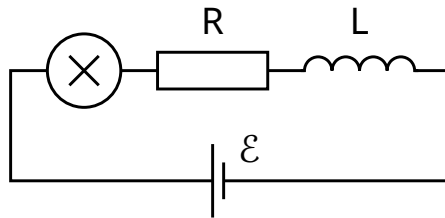


圖 2：元件  $X$ ，電阻  $R$ ，電感  $L$  及電源  $\mathcal{E}$  構成的電路。

- A.2** 由圖 2 電路的特性，決定在常數電源  $\mathcal{E}$  下，當  $R = 3.00$  歐姆時，可以有多少個穩態？ $R = 1.00$  歐姆時，答案是多少？ 1pt

- A.3** 設圖 2 電路的  $R = 3.00$  歐姆， $L = 1.00\mu H$  及  $\mathcal{E} = 15.0V$ ，決定在穩態下，非線性元件  $X$  的電流  $I_{stationary}$  和電壓  $V_{stationary}$  的值。 0.6pt

圖 2 的電路在穩態下  $I(t) = I_{stationary}$ 。如果穩態是穩定的，就是加入一個小變化（電流增加或減少）後，電流都回覆穩態。如果系統會離開穩態，就叫做不穩定。

- A.4** 用圖 2 電路方程式的數值，研究在穩態  $I = I_{stationary}$  下，穩態是否穩定？ 1pt

## B 部分— 雙穩定非線性元件的物理：無線電發射器 (5 分)

我們現在研判一個新電路組件 (圖 3)，元件  $X$  與電容  $C = 1.00\mu F$  並聯，再與電阻  $R = 3.00\Omega$ ，理想常數電源  $\mathcal{E} = 15.0V$  串聯，此電路會產生振盪，在一個周期內，元件  $X$  是在  $I - V$  特性曲線上，從一線段跳到另一線段形成。

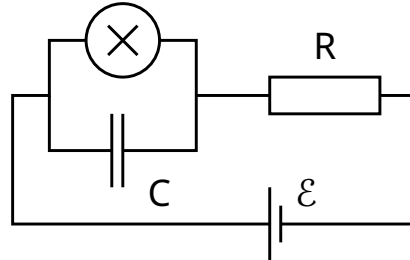


圖 3: 元件  $X$ , 電容  $C$ , 電阻  $R$ , 電源  $\mathcal{E}$  構成的電路。

**B.1** 在  $I - V$  圖上繪出振盪周期曲線，顯示變化方向（順時鐘或反時鐘），答案用方程及簡圖表示。 1.8pt

**B.2** 找出在振盪周期內，在  $I - V$  圖上，系統在每線段所需時間的表示式  $t_1$  和  $t_2$ 。決定所需時間的數值。求振盪周期  $T$  的數值，假設在  $I - V$  曲線上，在不同線段間跳變的時間不考慮。 1.9pt

**B.3** 估計一個周期內，非線性元件消耗的平均功率  $P$ ，數量級已足夠。 0.7pt

圖 3 電路作為無線電發射器時，元件  $X$  連在長度  $s$  的直線天線的末端。天線另一端是自由端。天線上會形成電磁駐波。電磁波沿天線傳播速度與真空相同。天線用的是系統的基頻，就是 **B.2** 的周期  $T$ 。

**B.4** 假設不長於  $1\text{km}$ ，天線的  $s$  是多少？ 0.6pt

### C 部分 – 雙穩定非線性元件在生物學：模擬神經元 (2 分)

用雙穩定非線性元件模擬生物過程。人腦的神經元具有如下性質：當外來訊號激發時，神經原振盪 1 周及回到原態，此稱可激性。因此，脈動可在（由神經元合構成的）神經系統傳遞。用芯片設計去模仿可激性和脈動傳遞，稱模擬神經元（神經元及晶體管）。

我們用剛研究的元件  $X$  去做電路來作模擬神經元的模型。可知，圖 3 電路的電壓  $\mathcal{E}$  下降至  $\mathcal{E}' = 12\text{V}$  時，振盪停止，系統在穩態。然後，電壓迅速回到  $\mathcal{E} = 15\text{V}$ 。在一段時間  $\tau$  ( $\tau < T$ ) 後，電壓  $\mathcal{E}$  再下降至  $\mathcal{E}' = 12\text{V}$ （如圖 4）。結果顯示存在一個臨界值  $\tau_{crit}$ ，當  $\tau < \tau_{crit}$  或  $\tau > \tau_{crit}$  時，系統顯示截然不同的行為。

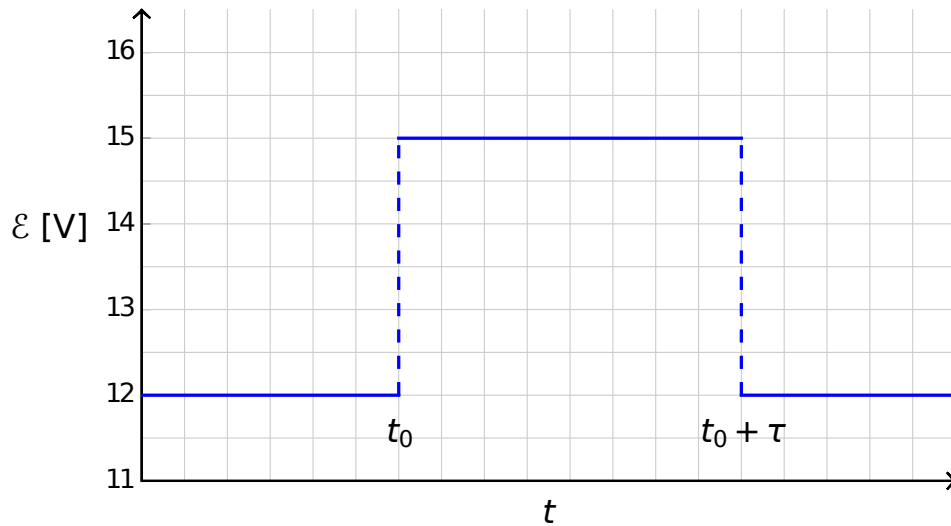


圖 4：電源的電壓作為時間的函數

- |            |  |       |
|------------|--|-------|
| <b>C.1</b> | 對應於以上資料，當 $\tau < \tau_{crit}$ 或 $\tau > \tau_{crit}$ 時，分別繪元件 $X$ 電流 $I_X(t)$ 的時變曲線， | 1.2pt |
| <b>C.2</b> | 參照已知開關，求 $\tau_{crit}$ 的表示式及數值。  | 0.6pt |
| <b>C.3</b> | 如果電路的 $\tau = 1.00 \times 10^{-6} s$ ，是否成模擬神經元？                                      | 0.2pt |