Dinâmica Não-Linear em Circuitos Elétricos (10 pontos)

Por favor leia as instruções gerais que se encontram num outro envelope antes de começar a resolver este problema.

Introdução

Os elementos semicondutores não-lineares bi-estáveis (tiristores, por exemplo) são muito usados na eletrónica como interruptores e geradores de oscilações eletromagnéticas. A principal utilização dos tiristores é o controlo de correntes alternas em eletrónica de potência (retificação de corrente alterna para corrente contínua para potências da ordem do MW, por exemplo). Os elementos bi-estáveis podem também ser utilizados como modelos dos fenómenos de auto-organização na Física (que é o objeto da parte B deste problema), na Biologia (parte C) e noutros campos da ciência não-linear atual.

Obejtivos

Estudar instabilidades e dinâmica não trivial de circuitos que incluem elementos com características $I-V$ não lineares e descobrir possíveis aplicações destes circuitos na engenharia e na modelação de sistemas biológicos.

Parte A. Estados estacionários e instabilidades (3 pontos)

A Fig.1 mostra a curva $I-V$ **em forma de S** característica de um elemento não-linear X. Para tensões entre $U_{\mathrm{h}} = 4,00$ V (a tensão de bloqueio) e $U_{\mathrm{th}} = 10,0$ V (a tensão de limiar) esta curva característica é uma função multívoca. Para simplificar o problema, o gráfico da Fig. 1 foi escolhido de modo a que esta função seja a aglutinação de várias funções lineares (cada ramo da função é um segmento de reta). Note que se a linha do ramo superior da curva fosse prolongada, passaria pela origem do gráfico. Esta aproximação leva a bons resultados na análise dos tiristores.

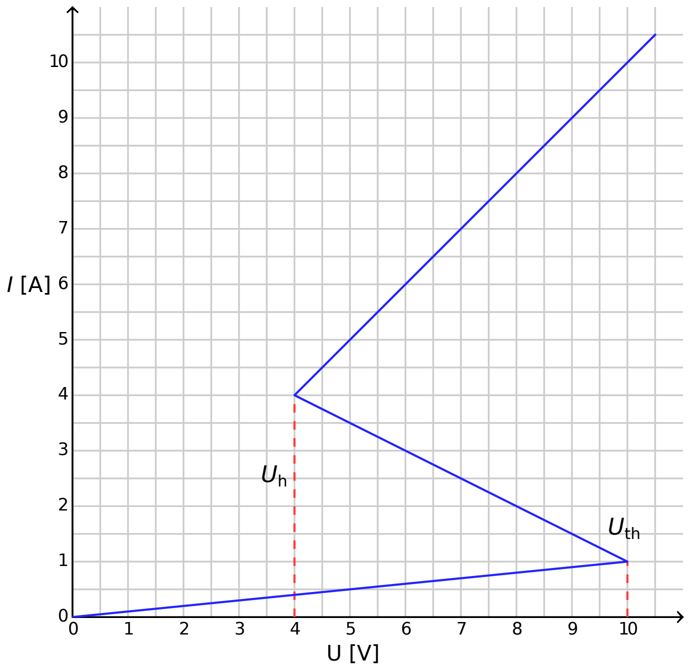

Figura 1: Curva característica ($I - V$) do elemento não-linear X.

A.1	Use o gráfico para determinar a resistência R_{on} do elemento X no ramo superior da curva $I-V$, e R_{off} no ramo inferior, respetivamente. O ramo intermédio é descrito pela equação $$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$ Encontre os valores dos parâmetros I_0 e R_{int}.	0.4pt

O elemento X é ligado em série (ver Fig. 2) à resistência R, a uma bobina L e a uma fonte de tensão contínua ideal $\mathcal{E}$. Diz-se que o circuito se encontra no estado estacionário quando a corrente é constante no tempo, $I(t) = \text{const}$.

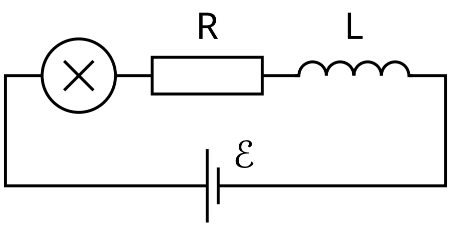

Figura 2: Circuito com o elemento X, a resistência R, a bobina L e a fonte de tensão $\mathcal{E}$.

A.2	Quantos estados estacionários pode o circuito da Fig. 2 ter para um dado valor de $\mathcal{E}$ quando $R = 3,00\ \Omega$? Como muda a resposta quando $R = 1,00\ \Omega$?	1pt

A.3	Sejam $R = 3,00\ \Omega,\ L = 1,00\ \mu\mathrm{H}$ e $\mathcal{E} = 15,0\ \mathrm{V}$ no circuito da Fig. 2. Determine os valores da corrente $I_{\text{estacionário}}$ e da tensão $V_{\text{estacionário}}$ aos terminais do elemento não-linear X quando o circuito está no estado estacionário.	0.6pt

Considere que o circuito da Fig. 2 está no estado estacionário com $I(t) = I_{\text{estacionário}}$. Diz-se que este estado estacionário é *estável* se, após uma pequena variação (subida ou descida) da corrente, a corrente volta ao valor estacionário. Por outro lado, se a corrente no sistema continuar a afastar-se do valor estacionário, diz-se que este estado é *instável*.

A.4	Recorra aos valores numéricos da questão **A.3** e estude a estabilidade do estado estacionário com $I(t) = I_{\text{estacionário}}$. O estado estacionário é estável ou instável?	1pt

Parte B. Elementos bi-estáveis não lineares na Física: emissor de rádio (5 pontos)

Vamos agora investigar uma nova configuração do circuito (ver Fig. 3). Desta vez o elemento não-linear X será ligado em paralelo a um condensador de capacidade $C = 1,00\ \mu\mathrm{F}$. O conjunto é depois ligado em série a uma resistência $R = 3,00\ \Omega$ e a uma fonte de tensão contínua ideal $\mathcal{E} = 15,0\ \mathrm{V}$. Verifica-se que o circuito 'oscila': no decurso de um ciclo, o elemento não-linear X salta de um ramo da curva característica $I - V$ para outro.

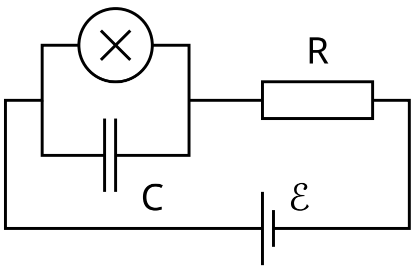

Figura 3: Circuito com o X, o condensador C, a resistência R e a fonte de tensão $\mathcal{E}$.

B.1	Desenhe o ciclo de oscilação no gráfico $I - V$ graph, não se esquecendo de indicar o seu sentido (horário ou anti-horário). Justifique a sua resposta com equações e diagramas.	1.8pt

B.2	Encontre expressões para os tempos t_1 e t_2 de permanência do sistema em cada um dos ramos da curva $I - V$ durante um ciclo de oscilação. Determine os seus valores numéricos. Determine o valor numérico do período de oscilação T supondo que o tempo requerido para os saltos entre os ramos da curva $I - V$ é desprezável.	1.9pt

B.3	Estime a potência média P dissipada pelo elemento não-linear no decurso de uma oscilação. A estimativa da sua ordem de grandeza é suficiente.	0.7pt

O circuito da Fig. 3 é usado para construir um emissor de rádio. Para este fim, é ligada ao elemento X uma antena linear (um arame direito e comprido) de comprimento s. A ponta da antena está livre. Na antena é criada uma onda eletromagnética estacionária. Considere que a velocidade das ondas eletromagnéticas na antena é igual à velocidade das mesmas ondas no vácuo. O harmónico principal que este emissor de rádio usa tem o período T calculado na questão **B.2**.

B.4	Assumindo que s não pode exceder $1\ \mathrm{km}$, qual é o seu valor ótimo?	0.6pt

Parte C. Elementos bi-estáveis não lineares na Biologia: o neuristor (2 pontos)

Nesta parte do problema iremos considerar uma aplicação dos elementos bi-estáveis não lineares à modelação de processos biológicos. Um neurónio no cérebro humano possui a seguinte propriedade: quando é excitado por um sinal externo, oscila apenas uma vez e regressa ao seu estado inicial. Esta propriedade chama-se 'excitabilidade' e é devido a ela que é possível a propagação de impulsos na rede de neurónios acoplados que forma o sistema nervoso. Um neuristor é um circuito integrado concebido para reproduzir a excitabilidade e a propagação de impulsos. O seu nome resulta da aglutinação de 'neurónio' e 'transistor'.

Vamos tentar construir um modelo simples de um neuristor recorrendo a um circuito que inclui o elemento não-linear X que estudámos anteriormente. Comecemos por diminuir a tensão $\mathcal{E}$ no circuito da Fig. 3 até ao valor $\mathcal{E}' = 12,0\ \mathrm{V}$, o que conduz à paragem das oscilações, permitindo que o sistema atinja o seu estado estacionário. De seguida esta tensão é subitamente aumentada para $\mathcal{E} = 15,0\ \mathrm{V}$, e, após um certo tempo τ (com $\tau < T$), recoloca-se a tensão no valor $\mathcal{E}'$ (ver Fig. 4). Com este procedimento pode-se constatar que há um valor crítico para este tempo, $\tau_{\mathrm{crit.}}$, isto é, que o sistema exibe um comportamento qualitativamente diferente para $\tau < \tau_{\mathrm{crit}}$ e para $\tau > \tau_{\mathrm{crit}}$.

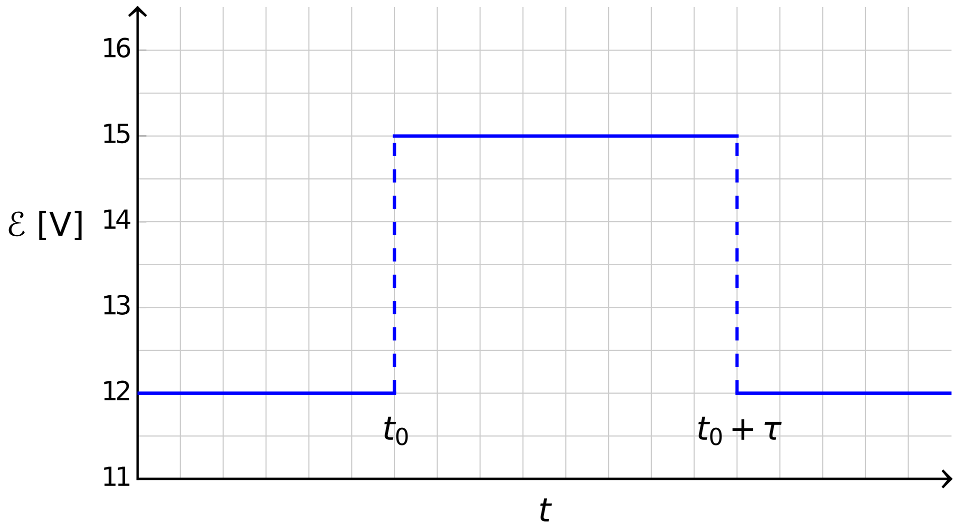

Figura 4: Tensão fornecida pela fonte, em função do tempo.

C.1	Esboce gráficos que mostrem a variação com o tempo da corrente $I_X(t)$ no elemento não-linear X para os casos $\tau < \tau_{\mathrm{crit}}$ e $\tau > \tau_{\mathrm{crit}}$.	1.2pt

C.2	Encontre a expressão e o valor numérico do tempo crítico τ_{crit} para o qual ocorre a mudança de comportamento.	0.6pt

C.3	O circuito representa um neuristor quando $\tau = 1,00 \times 10^{-6}$ s?	0.2pt