

## Нелинейная динамика в электрических цепях (10 баллов)

Прежде чем приступить к выполнению этого задания, прочитайте инструкцию.

### Введение

Бистабильные нелинейные полупроводниковые элементы (например, тиристоры) широко используются в электронике в качестве переключателей и генераторов электромагнитных колебаний. С помощью тиристоров обычно управляют переменными токами в силовой электронике, например преобразуют мегаваттные переменные токи в постоянные. Бистабильные элементы также могут быть модельными системами для изучения самоорганизации в физике (это рассматривается в части В этой задачи), в биологии (часть С) и в других областях современной нелинейной динамики.

В этой задаче мы изучим неустойчивости и нетривиальные динамические свойства электрических цепей, содержащих элементы с нелинейными вольт-амперными характеристиками. Мы также рассмотрим возможные применения подобных схем в электронике и в моделировании биологических систем.

### Часть А. Стационарные состояния и неустойчивости (3 балла)

На рисунке 1 показана так называемая **S-образная** вольт-амперная характеристика нелинейного элемента  $X$ . В диапазоне напряжений между  $U_h = 4.00$  В (удерживаемое напряжение) и  $U_{th} = 10.0$  В (пороговое напряжение) эта вольт-амперная характеристика многозначна. График на рисунке 1 является ломанной (каждая ветвь представляет собой отрезок). Если верхнюю ветвь графика продолжить, то она пройдет через начало координат. Это приближение хорошо описывает реальные тиристоры.

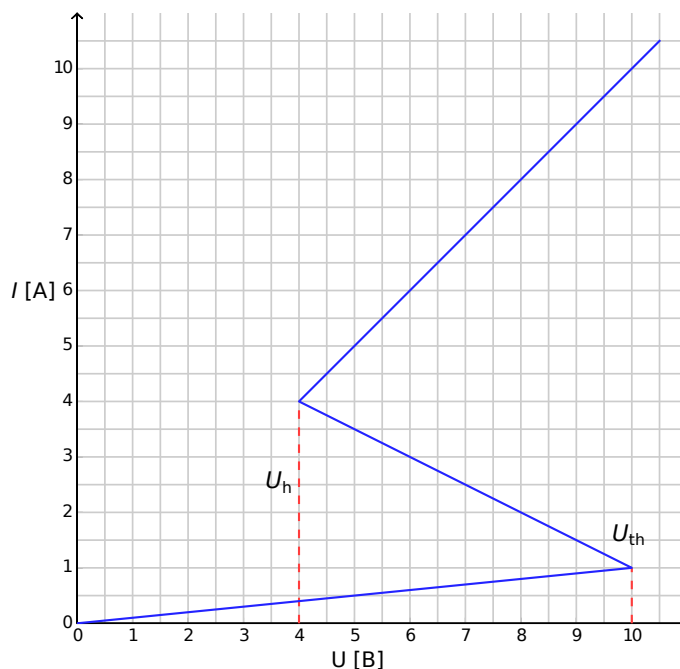


Рисунок 1: Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента  $X$ .

- A.1** С помощью графика определите сопротивление  $R_{\text{on}}$  элемента  $X$  на верхней ветви вольт-амперной характеристики и  $R_{\text{off}}$  на нижней ветви соответственно. Средняя ветвь описывается уравнением 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

Найдите значения параметров  $I_0$  и  $R_{\text{int}}$ .

Элемент  $X$  соединен последовательно (рисунок 2) с резистором  $R$ , катушкой индуктивности  $L$  и идеальным источником напряжения  $\mathcal{E}$ . Если электрическая цепь находится в стационарном состоянии, то сила тока постоянна во времени,  $I(t) = \text{const}$ .

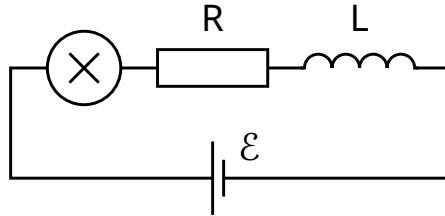


Рисунок 2: Электрическая цепь с элементом  $X$ , резистором  $R$ , катушкой индуктивности  $L$  и источником напряжения  $\mathcal{E}$ .

- A.2** Сколько возможных стационарных состояний может иметь электрическая цепь, изображенная на рисунке 2, при некотором заданном значении  $\mathcal{E}$  и при  $R = 3.00 \Omega$ ? Каким будет ответ при  $R = 1.00 \Omega$ ? 1pt

- A.3** Пусть в электрической цепи, показанной на рисунке 2,  $R = 3.00 \Omega$ ,  $L = 1.00 \text{ мкГн}$  и  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ В}$ . Определите значения сила тока  $I_{\text{stationary}}$  и напряжения  $V_{\text{stationary}}$  на нелинейном элементе  $X$  в стационарном состоянии. 0.6pt

Пусть электрическая цепь на рисунке 2 находится в стационарном состоянии с  $I(t) = I_{\text{stationary}}$ . Стационарное состояние называется устойчивым, если после небольшого изменения тока (увеличения или уменьшения) значение тока возвращается к стационарному состоянию. Однако, если система продолжает уходить от стационарного состояния, то оно называется неустойчивым.

- A.4** Используйте численные значения заданные в **A.3** и изучите стабильность стационарного состояния с  $I(t) = I_{\text{stationary}}$ . Является ли стационарное состояние устойчивым или неустойчивым? 1pt

## Часть В. Бистабильные нелинейные элементы в физике: радиопередатчик (5 баллов)

В этой части мы исследуем новую схему электрической цепи (рисунок 3). Нелинейный элемент  $X$  соединен с конденсатором емкостью  $C = 1.00 \text{ мкФ}$  параллельно. Этот блок включен последовательно с резистором  $R = 3.00 \Omega$  и идеальным источником постоянного напряжения  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ В}$ . Оказывается, что в этой цепи возникают колебания. За время одного периода колебаний свойства

элемента  $X$  "перескакивают" по вольт-амперной характеристике с одной ветви на другую.

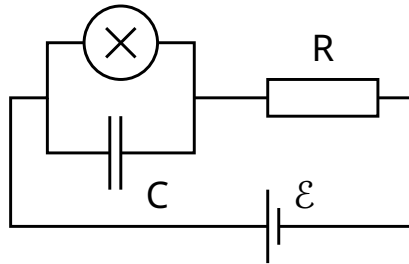


Рисунок 3: Электрическая цепь, состоящая из элемента  $X$ , конденсатора  $C$ , резистора  $R$  и источника напряжения  $\mathcal{E}$ .

**B.1** Нарисуйте цикл одного колебания на вольт-амперной характеристике, в том числе, укажите направление колебания (по часовой или против часовой стрелки). Обоснуйте свой ответ с помощью уравнений и схем. 1.8pt

**B.2** Найдите формулы для времён  $t_1$  и  $t_2$ , в течение которых система находится на каждой из ветвей вольт-амперной характеристики во время периода колебаний. Определите их численные значения. Найдите численное значение периода колебаний  $T$ , полагая, что временем, необходимым для скачкообразного перехода между ветвями вольт-амперной характеристики, можно пренебречь. 1.9pt

**B.3** Оцените среднюю мощность  $P$ , рассеянную нелинейным элементом в течение одного колебания. Достаточно привести порядок величины. 0.7pt

Электрическая цепь, показанная на рисунке 3, может использоваться для создания радиопередатчика. Для этого элемент  $X$  подключается к одному из концов антенны длины  $s$ . Антенна — это длинный прямой провод. Противоположный конец провода свободный. В антенне образуется стоячая электромагнитная волна. Скорость электромагнитной волны в антенне такая же, как и в вакууме. Передатчик настроен на основную гармонику системы с периодом  $T$  (из пункта **B.2**).

**B.4** Каково оптимальное значение  $s$ , если считать, что оно не может быть больше 1 км? 0.6pt

### Часть С. Бистабильные нелинейные элементы в биологии: нейристор (2 балла)

В этой части задачи мы рассмотрим применение бистабильных нелинейных элементов к моделированию биологических процессов. Нейрон в человеческом мозге обладает следующим свойством: при возбуждении внешним сигналом он совершает одно колебание, а затем возвращается в исходное состояние. Эта свойство называется возбудимостью. Благодаря этому свойству импульсы могут распространяться в сети связанных нейронов, которые образуют нервные системы. Полупроводниковый чип, предназначенный для имитации возбудимости и распространения импульса, называется нейристором.

Попробуем смоделировать простой нейристор, используя электрическую схему с исследованным ранее нелинейным элементом  $X$ . Для этого напряжение  $\mathcal{E}$  в схеме на рисунке 3 уменьшается до  $\mathcal{E}' = 12.0$  В. Колебания прекращаются и система переходит в свое стационарное состояние. Затем напряжение быстро увеличивается до  $\mathcal{E} = 15.0$  В и спустя некоторое время  $\tau$  ( $\tau < T$ ) возвращается обратно к  $\mathcal{E}'$  (Рис. 4). Оказывается, что есть некоторое критическое значение  $\tau_{\text{crit}}$ , такое, что поведение системы качественно отличается при  $\tau < \tau_{\text{crit}}$  и при  $\tau > \tau_{\text{crit}}$ .

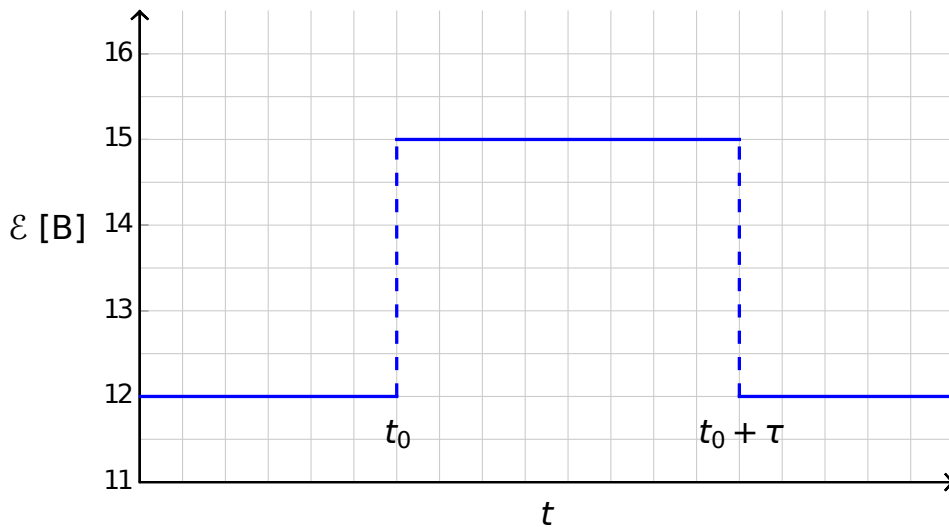


Рисунок 4: Напряжение источника как функция времени.

- |            |   |       |
|------------|---|-------|
| <b>C.1</b> | Схематически нарисуйте графики временной зависимости тока $I_X(t)$ через нелинейный элемент $X$ для $\tau < \tau_{\text{crit}}$ и для $\tau > \tau_{\text{crit}}$ . | 1.2pt |
| <b>C.2</b> | Найдите выражение для критического времени $\tau_{\text{crit}}$ и его численное значение, при котором происходит изменение поведения системы.                       | 0.6pt |
| <b>C.3</b> | Является ли схема нейристором при $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ с?   | 0.2pt |