

## พลศาสตร์ไม่เชิงเส้น (Nonlinear Dynamics) ของวงจรไฟฟ้า (10 คะแนน)

จงอ่านข้อแนะนำทั่วไปในอีกของหนึ่งก่อนเริ่มทำข้อสอบ

### บทนำ

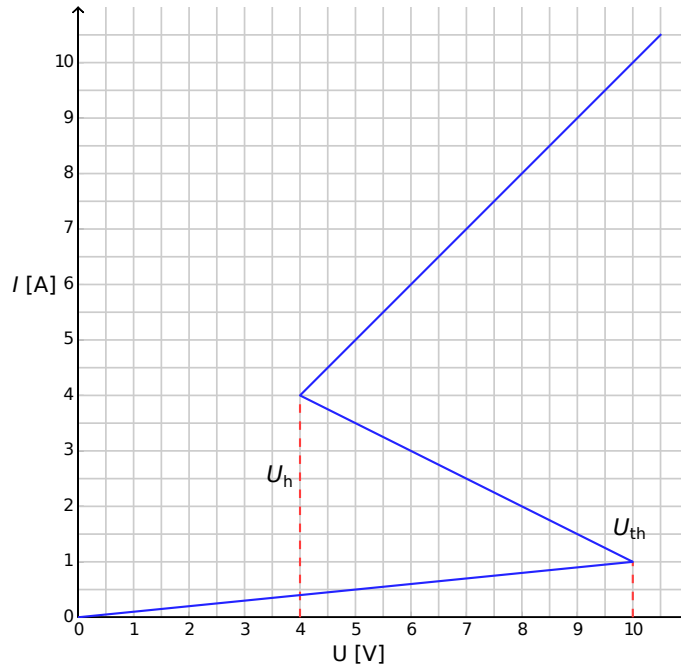
ชิ้นส่วนวงจรกึ่งตัวนำไม่เชิงเส้น (nonlinear) ทวิเสถียร (bistable) (เช่น ไทริสเตอร์ (thyristor)) ถูกใช้อย่างกว้างขวางในวงจรไฟฟ้า เป็นสวิตช์และตัวกำเนิดการสั่นของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า การใช้ประโยชน์หลักของไทริสเตอร์ คือการควบคุมไฟฟ้ากระแสสลับในวงจรไฟฟ้ากำลังสูง ตัวอย่างเช่น เครื่องเปลี่ยนไฟฟ้ากระแสสลับให้เป็นกระแสตรง (rectifier) ในระดับเมกะวัตต์ ชิ้นส่วนวงจรทวิเสถียรอาจจะใช้เป็นระบบจำลองสำหรับปรากฏการณ์การจัดการตัวเองในฟิสิกส์ (หัวข้อนี้จะถูกพูดถึงในข้อ B ของคำถามนี้) ในชีววิทยา (ดูข้อ C) และสาขาอื่นๆ ของวิทยาศาสตร์ไม่เชิงเส้นยุคใหม่

### วัตถุประสงค์

เพื่อศึกษาความไม่เสถียรและพลศาสตร์ของวงจรที่รวมชิ้นส่วนวงจรที่ความสัมพันธ์  $I - V$  ไม่เชิงเส้น และเพื่อค้นหาประโยชน์ที่เป็นไปได้ของวงจรเหล่านี้ในด้านวิศวกรรมและในการสร้างแบบจำลองของระบบทางชีววิทยา

### ข้อ A. สถานะคงตัว (stationary state) และความไม่เสถียร (instability) (3 คะแนน)

รูปที่ 1 แสดงกราฟความสัมพันธ์  $I - V$  ที่เรียกว่าความสัมพันธ์รูปตัวเอส (S-shaped) ของชิ้นส่วนวงจรไม่เชิงเส้น  $X$  ในช่วงความต่างศักย์คร่อม  $X$  ที่มีค่าระหว่าง  $U_h = 4.00 \text{ V}$  (ความต่างศักย์ยึด: holding voltage) และ  $U_{th} = 10.0 \text{ V}$  (ความต่างศักย์ขีดแบ่ง: threshold voltage) ความสัมพันธ์  $I - V$  นี้ให้ค่ากระแสหลายค่าที่ค่าความต่างศักย์เดียวกัน เพื่อให้ง่าย กราฟในรูปที่ 1 ถูกวาดให้แต่ละส่วนเป็นเส้นตรง โดยเฉพาะเส้นแขนงบนสุดนั้นถ้าลากเส้นต่อไปจะพุ่งไปตัดจุดกำเนิดของกราฟพอดี การประมาณนี้ใช้อธิบายพฤติกรรมของไทริสเตอร์จริงๆ ได้เป็นอย่างดี



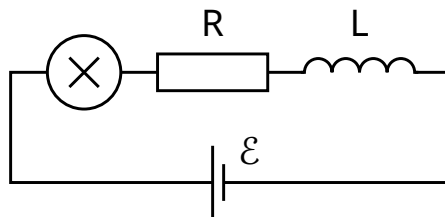
รูปที่ 1: กราฟความสัมพันธ์  $I - V$  ของชิ้นส่วนวงจรไม่เชิงเส้น  $X$

- A.1** จากกราฟ จงหาค่าความต้านทาน  $R_{\text{on}}$  ของชิ้นส่วนวงจร  $X$  ของแขนงด้านบนสุดของกราฟ-ความสัมพันธ์  $I - V$  และ  $R_{\text{off}}$  ของแขนงด้านล่างสุดตามลำดับ ส่วนแขนงตรงกลางสามารถอธิบายได้โดยสมการ 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}} \quad (1)$$

จงหาค่าของพารามิเตอร์  $I_0$  และ  $R_{\text{int}}$

ชิ้นส่วนวงจร  $X$  ต่อแบบอนุกรม (ดูรูปที่ 2) กับตัวต้านทาน  $R$  ตัวเหนี่ยวนำ  $L$  และตัวกำเนิดศักย์ไฟฟ้าอุดมคติ  $\mathcal{E}$  ที่ไม่มีความต้านทานภายใน ในกรณีที่กระแสมีค่าคงตัวเทียบกับเวลา กล่าวคือ  $I(t) = \text{ค่าคงตัว}$  เราจะเรียกวงจรนี้ว่าอยู่ใน สภาวะคงตัว (stationary state)



รูปที่ 2: วงจรไฟฟ้าที่มีชิ้นส่วนวงจร  $X$  ตัวต้านทาน  $R$  ตัวเหนี่ยวนำ  $L$  และตัวกำเนิดศักย์ไฟฟ้า  $\mathcal{E}$

**A.2** จงหาจำนวนจุดของสภาวะคงตัวที่เป็นไปได้ของวงจรในรูปที่ 2 เมื่อ  $\mathcal{E}$  มีค่าคงตัวค่าหนึ่ง และ  $R = 3.00 \Omega$  1pt  
ถ้าเปลี่ยนเป็น  $R = 1.00 \Omega$  แล้วจะมีจุดสภาวะคงตัวที่เป็นไปได้จำนวนกี่จุด

**A.3** ให้  $R = 3.00 \Omega$   $L = 1.00 \mu\text{H}$  และ  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$  ในวงจรแสดงในรูปที่ 2 จงหาค่าของกระแส  $I_{\text{stationary}}$  และศักย์ไฟฟ้า  $V_{\text{stationary}}$  ที่ผ่านและคร่อมชิ้นส่วนวงจรไม่เชิงเส้น  $X$  เมื่อวงจรอยู่ในสภาวะคงตัว 0.6pt

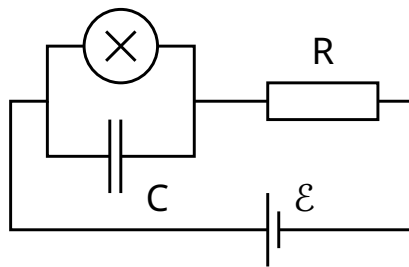
วงจรในรูปที่ 2 อยู่ในสภาวะคงตัว โดยมี  $I(t) = I_{\text{stationary}}$  สภาวะคงตัวนี้เสถียรถ้าหลังจากถูกรบกวนเล็กน้อย (เพิ่มหรือลดกระแสเล็กน้อย) แล้วกระแสจะกลับ ไปสู่ค่าเดิมที่สภาวะคงตัว แต่สภาวะคงตัวนี้จะไม่เสถียรถ้าหลังจากถูกรบกวนไปแล้วระบบออกห่างไปจากสภาวะคงตัวเรื่อยๆ

**A.4** ใช้ค่าเชิงตัวเลขจากข้อ **A.3** แล้วศึกษาความเสถียรของสภาวะคงตัวเมื่อกระแส  $I(t) = I_{\text{stationary}}$  1pt  
จากนั้นจงหาว่าสภาวะคงตัวนี้เสถียรหรือไม่

## ข้อ B. ชิ้นส่วนวงจรไม่เชิงเส้นทวิเสถียร (Bistable non-linear elements) ในฟิสิกส์: เครื่องส่งสัญญาณวิทยุ (5 คะแนน)

เราจะตรวจสอบการทำงานของวงจรแบบใหม่ (ดูรูปที่ 3) ตอนนี้อนุกรมนำชิ้นส่วนวงจรไม่เชิงเส้น  $X$  ต่อแบบขนานกับตัวเก็บประจุที่มีค่าความจุไฟฟ้า  $C = 1.00 \mu\text{F}$  จากนั้นส่วนนี้ของวงจรถูกต่อแบบอนุกรมกับตัวต้านทานที่มีค่าความต้านทาน  $R = 3.00 \Omega$  และตัวกำเนิดศักย์ไฟฟ้าอุดมคติ  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$

วงจรนี้มีการสั่นของกระแสและศักย์ไฟฟ้าแบบเป็นรอบ (cycle) โดยที่ความสัมพันธ์  $I - V$  ของชิ้นส่วนไม่เชิงเส้น  $X$  จะกระโดดจากแขนงหนึ่งไปยังอีกแขนงหนึ่งในแต่ละรอบการสั่น



รูปที่ 3: วงจรไฟฟ้าที่มีชิ้นส่วนวงจร  $X$  ตัวเก็บประจุ  $C$  ตัวต้านทาน  $R$  และตัวกำเนิดศักย์ไฟฟ้า  $\mathcal{E}$

**B.1** จงวาดภาพของรอบการสั่นบนกราฟความสัมพันธ์  $I - V$  ให้ออกทิศของการเปลี่ยนแปลง 1.8pt  
(ตามเข็มนาฬิกาหรือทวนเข็มนาฬิกา) พร้อมทั้งให้เหตุผลโดยใช้สมการและแผนภาพ

**B.2** จงหาสมการสำหรับเวลา  $t_1$  และ  $t_2$  ที่ระบบใช้ในแต่ละแขนงของกราฟความสัมพันธ์  $I - V$  1.9pt  
ในช่วงหนึ่งรอบการสั่น จงหาค่าตัวเลขของ  $t_1$  และ  $t_2$  และหาค่าตัวเลขของคาบการสั่น  $T$   
ให้สมมติว่าเวลาที่ใช้ในการกระโดดจากแขนงหนึ่งไปยังอีกแขนงหนึ่งนั้นมีค่าน้อยมาก

**B.3** จงประมาณกำลังเฉลี่ย  $P$  ที่สูญเสียไปจากชั้นส่วนวงจรมีเชิงเส้นในหนึ่งรอบการสั่น ให้อันดับของขนาด (order of magnitude) ถูกก็เพียงพอ 0.7pt

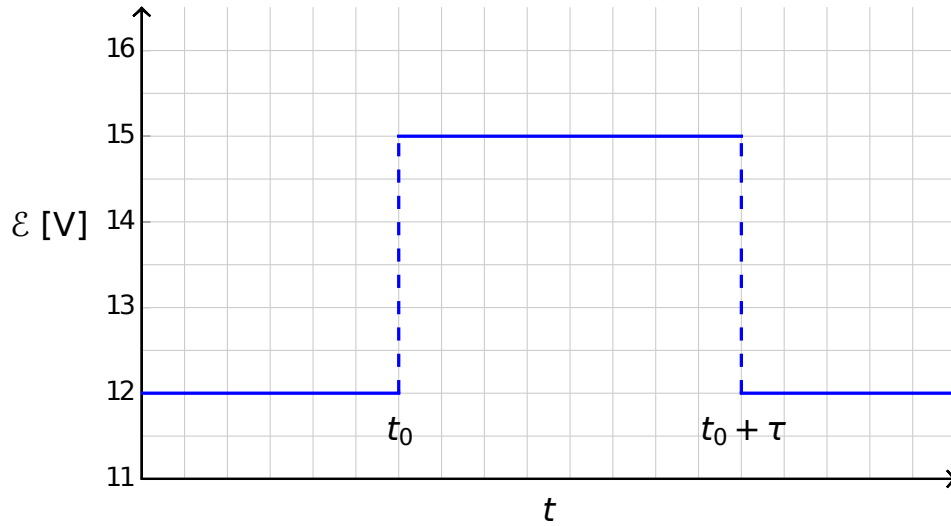
วงจรมีรูปที่ 3 ถูกนำไปใช้ในการสร้างเครื่องส่งสัญญาณวิทยุ โดยที่ชั้นส่วนวงจรมีเชิงเส้น  $X$  จะต่อกับปลายด้านหนึ่งของเสาอากาศ (ลวดตรงยาว) ที่มีความยาว  $s$  อีกด้านหนึ่งของลวดปล่อยอิสระ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าภายในเสาอากาศเป็นคลื่นนิ่ง อัตราเร็วของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตามแนวเสาอากาศจะเท่ากับในสุญญากาศ เครื่องส่งสัญญาณวิทยุใช้ฮาร์โมนิกหลักของระบบซึ่งมีคาบการสั่น  $T$  ตามที่คำนวณได้ในข้อ **B.2**

**B.4** จงหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของ  $s$  สมมติว่ามันต้องไม่มากกว่า 1 km 0.6pt

### ข้อ C. ชั้นส่วนวงจรมีเชิงเส้นทวิเสถียรในชีววิทยา: นิวริสเตอร์ (neuristor) (2 คะแนน)

ในข้อนี้ นักเรียนจะพิจารณาประโยชน์ของชั้นส่วนวงจรมีเชิงเส้นทวิเสถียรในการสร้างแบบจำลองของกระบวนการทางชีววิทยา เซลล์ประสาท (neuron) ในสมองของมนุษย์มีสมบัติต่อไปนี้ เมื่อถูกกระตุ้นโดยสัญญาณจากภายนอก มันจะสั่นเพียงหนึ่งรอบแล้วจะกลับไปยังสภาพเริ่มต้น สมบัตินี้เรียกว่าความสามารถในการถูกกระตุ้น (excitability) เนื่องจากสมบัตินี้ พัลส์ (pulse) สามารถแพร่ขยายไปในเครือข่ายของเซลล์ประสาทที่เชื่อมต่อกันเป็นระบบประสาทได้ชีพที่ทำจากสารกึ่งตัวนำซึ่งถูกออกแบบให้เลียนแบบการถูกกระตุ้นและการแพร่ขยายของสัญญาณในลักษณะนี้ เรียกว่านิวริสเตอร์ (neuristor) (มาจากคำว่าเซลล์ประสาท (neuron) และทรานซิสเตอร์ (transistor))

เราจะพยายามสร้างแบบจำลองนิวริสเตอร์อย่างง่าย โดยใช้วงจรมีชั้นส่วนวงจรมีเชิงเส้น  $X$  ซึ่งเราได้ศึกษาสมบัติไปก่อนหน้านี้แล้ว เพื่อให้ได้ผลตามต้องการ เราลดศักย์  $\mathcal{E}$  ของวงจรมีรูปที่ 3 ลงเป็น  $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$  ทำให้การสั่นหยุดลงและระบบจะเข้าหาสภาวะคงตัว จากนั้นเราจะเพิ่มศักย์ขึ้นอย่างรวดเร็วกลับไปเป็นค่า  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$  และเมื่อเวลาผ่านไป  $\tau$  (โดยที่  $\tau < T$ ) เราจะเปลี่ยนศักย์ให้เป็นค่า  $\mathcal{E}'$  อีกครั้ง (ดูรูปที่ 4) เราจะพบว่ามีความถี่วิกฤต  $\tau_{\text{crit}}$  ที่ระบบจะแสดงพฤติกรรมที่ต่างกันสำหรับ  $\tau < \tau_{\text{crit}}$  และ  $\tau > \tau_{\text{crit}}$



รูปที่ 4: ศักย์ของตัวกำเนิดศักย์ไฟฟ้าเป็นฟังก์ชันของเวลา

<b>C.1</b>	วาดกราฟคร่าวๆ ของกระแส $I_X(t)$ ที่ผ่านชิ้นส่วนที่ไม่เชิงเส้น $X$ ในรูปฟังก์ชันของเวลาสำหรับ $\tau < \tau_{\text{crit}}$ และ $\tau > \tau_{\text{crit}}$	1.2pt
<b>C.2</b>	จงหาสมการและค่าตัวเลขของเวลาวิกฤต $\tau_{\text{crit}}$	0.6pt
<b>C.3</b>	วงจรที่มี $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s เป็นนิวริสเตอร์ได้หรือไม่	0.2pt