

## 電路的非線性動力學 (10 分)

在回答本問題之前，請細讀另一信封袋內的「理論考試通用指引」。

### 導論

雙穩態的非線性半導體元件，如閘流器 (thyristor)，在電子產品中被廣泛用為開關與電磁振盪產生器。閘流器的主要應用是用來控制電力電子產品的交流電流，例如將百萬瓦等級的交流電流整流成為直流電流。雙穩態元件還可作為物理學中的自我組織現象 (見 B 部分)、生物學 (見 C 部分) 與其它近代非線性科學的模型系統。

### 目標

本題的目標是要對含有非線性  $I - V$  特性元件之電路，探討其不穩定性與較不平常的動力學，並由此找出此類電路在工程上與模擬生物系統上的可能應用。

### A 部分. 定態與不穩定性 (3 分)

圖 1 所示為某一非線性元件  $X$  所具有的 **S 形**  $I - V$  特性曲線。當電壓在  $U_h = 4.00 \text{ V}$  (保持電壓) 到  $U_{th} = 10.0 \text{ V}$  (底限電壓) 的範圍內時，此  $I - V$  曲線為多值函數。為了簡化問題，圖 1 中的曲線被近似為分段線性 (即每一分段都為直線線段)，且其最上方之分段的延伸線通過原點，對真實的閘流器而言，此近似乃是相當好的描述。

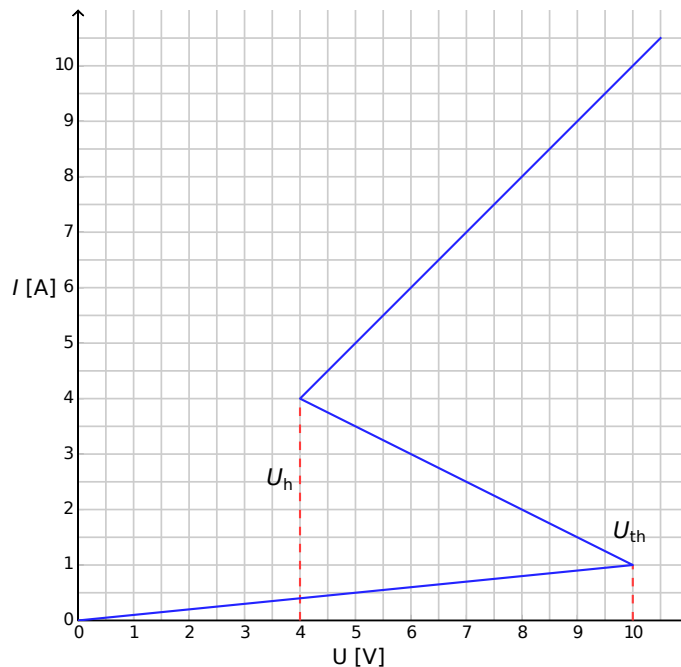


圖 1：非線性元件  $X$  的  $I - V$  特性曲線。

- A.1** 利用圖 1 分別求出  $X$  元件之  $I - V$  特性曲線最上方分段的電阻  $R_{\text{on}}$  與最下方分段的電阻  $R_{\text{off}}$ ，並計算它們的值。中間分段可用以下方程式描述： 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}} \quad (1)$$

試求出參數  $I_0$  與  $R_{\text{int}}$  之值。

如圖 2 所示，將  $X$  元件與電阻  $R$ 、電感  $L$  及電動勢為  $\mathcal{E}$  之理想電池串聯。若電流不隨時間而變，即  $I(t) = \text{常數}$ ，我們稱此電路處於「定態 (stationary state)」。

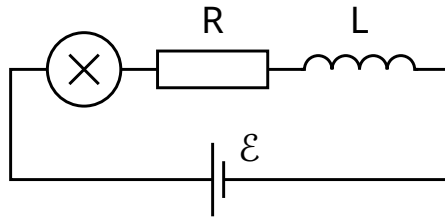


圖 2：元件  $X$ 、電阻  $R$ 、電感  $L$  與理想電池  $\mathcal{E}$  組成的串聯電路。

- A.2** 已知圖 2 所示電路之電池電動勢  $\mathcal{E}$  固定。當電阻為  $R = 3.00 \Omega$  時，試求圖 2 電路可能擁有之定態的數目。若電阻改為  $R = 1.00 \Omega$ ，電路可能的定態數目為何？ 1pt

- A.3** 設圖 2 中  $R = 3.00 \Omega$ ,  $L = 1.00 \mu\text{H}$ ，而  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ 。試求在定態時，通過非線性元件  $X$  之電流值  $I_{\text{stationary}}$  與電壓差值  $V_{\text{stationary}}$ 。 0.6pt

考慮圖 2 所示電路處於電流  $I(t) = I_{\text{stationary}}$  之定態，並在此情況下，於電路中加上一小擾動 (電流的小量增加或減少)。若電流能回復而趨向原定態的電流值，我們稱此定態為穩定的，反之，若電流朝離開原定態電流值改變，則此定態為不穩定。

- A.4** 使用 **A.3** 小題所得之數值，探討此電流為  $I(t) = I_{\text{stationary}}$  之定態的穩定性。此定態是穩定的，還是不穩定的？ 1pt

## B 部分. 雙穩態非線性元件在物理上的應用：無線電發射器 (5 分)

在此部分，我們分析圖 3 所示之新的電路組態。此時，非線性元件  $X$  與一電容值為  $C = 1.00 \mu\text{F}$  之電容並聯後，再與一電阻值為  $R = 3.00 \Omega$  之電阻與電動勢為  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$  之理想電池串聯。結果顯示圖 3 的電路會出現振盪，即非線性元件  $X$  在每一個振盪循環 (或週期) 中，會由  $I - V$  特性曲線中的某一分段躍遷到另一分段。

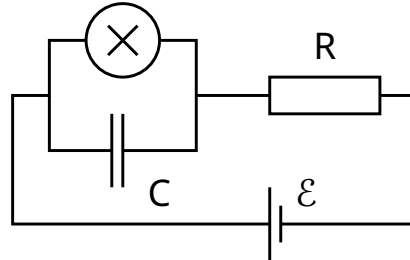


圖 3：元件  $X$ 、電容  $C$ 、電阻  $R$  與電池  $\varepsilon$  組成之電路。

- |            |  |       |
|------------|--|-------|
| <b>B.1</b> | 在 $I - V$ 曲線圖上，將振盪循環畫出，以完整顯示 $I$ 對 $V$ 的變化，包括振盪進行的方向 (順時鐘方向或反時鐘方向)。以方程式與簡圖說明 (或證明) 所給答案的合理性。                                     | 1.8pt |
| <b>B.2</b> | 在一振盪循環內，令電路在 $I - V$ 曲線上每一分段的時間為 $t_1$ 至 $t_2$ ，試求 $t_1$ 與 $t_2$ 的數學表示式，並求其數值大小。假設設在 $I - V$ 曲線上不同分段間之躍遷時間可被忽略不計，試求振盪週期 $T$ 之數值。 | 1.9pt |
| <b>B.3</b> | 估計非線性元件在每一振盪循環所消耗之平均功率 $P$ (作數量級估計即可)。   | 0.7pt |

圖 3 所示之電路可用以建造一台無線電發射器，此時，元件  $X$  接在一長度為  $s$  之線形天線 (一長直導線) 之一端，而線形天線另一端則是不接任何元件之開放自由端。在此線形天線上，電磁波形成駐波，並且電磁波在天線上傳播的速度與在真空的波速相同。發射器使用此系統之基頻，其週期即 **B.2** 小題中的週期  $T$ 。

- |            |                                      |       |
|------------|--------------------------------------|-------|
| <b>B.4</b> | 假設天線長度 $s$ 不超過 1 km，試求天線長度 $s$ 之最佳值。 | 0.6pt |
|------------|--------------------------------------|-------|

### C 部分. 生物體內的雙穩態非線性元件：人造神經元 (neuristor) (2 分)

在此部分，我們將應用雙穩態非線性元件，以模擬生物學過程。人腦中的神經元有以下的特性：當被一個外來訊號激發後，神經元中會產生一次的電性震盪，然後再回到初始狀態，這個特徵稱為神經元可激發性 (excitability)。由於這個特性，脈衝訊號可以在神經系統的耦合神經元所組成之神經網路中傳遞。經過設計，用以模仿神經元可激發性與神經系統中脈衝訊號傳遞之半導體晶片，稱為「人造神經元 (neuristor)」。

在本問題中，我們將嘗試使用前面所探討的、包含非線性元件  $X$  的電路，來建立一個簡單的人造神經元。為達此目的，將圖 3 電路中的電動勢  $\varepsilon$  降至  $\varepsilon' = 12.0 \text{ V}$ ，此時，電路停止震盪，系統可達到定態。然後，將電路快速的升高回到  $\varepsilon = 15.0 \text{ V}$ 。在一段小於週期之時間  $\tau$  ( $\tau < T$ ) 後，再將電動勢設定回到  $\varepsilon'$  (如圖 4 所示)。結果顯示，存在一個臨界時間長度  $\tau_{\text{crit}}$ ，對  $\tau < \tau_{\text{crit}}$  或  $\tau > \tau_{\text{crit}}$ ，此電路系統的行為完全不同。

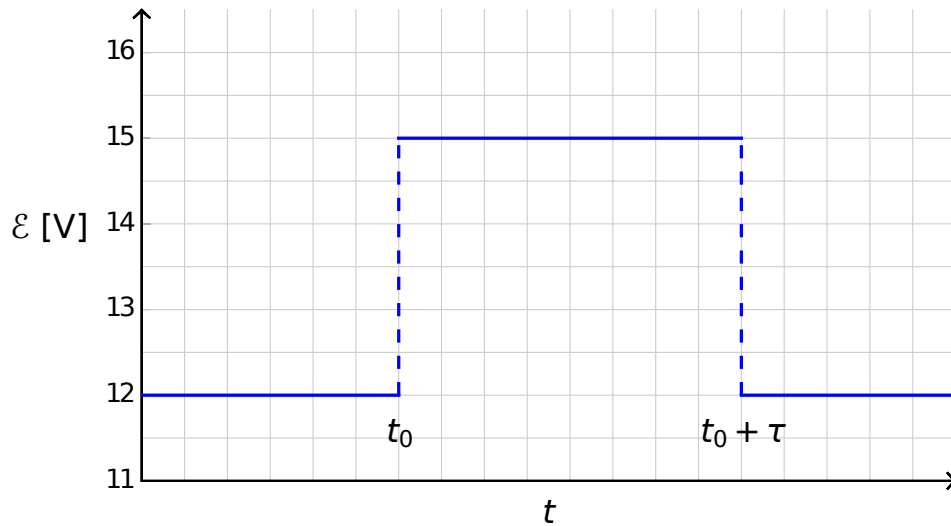


圖 4：電池電動勢隨時間之變化。

**C.1** 作圖描述通過非線性元件  $X$  之電流  $I_X(t)$  隨時間的變化。就  $\tau < \tau_{\text{crit}}$  與  $\tau > \tau_{\text{crit}}$  分別作圖。 1.2pt

**C.2** 試求  $\tau_{\text{crit}}$  的數學表示式，並求出其數值大小。 0.6pt

**C.3** 試問以上的電路，若  $\tau = 1.00 \times 10^{-6} \text{ s}$ ，它能作為人造神經元嗎？ 0.2pt