

大型強子對撞機 (10 分)

開始作答本題前，細讀另一個信封內的一般指引。

我們將在本題討論位於 CERN 的粒子加速器 LHC (大型強子對撞機) 的物理。CERN 是世界上最大的粒子物理實驗，它的主要目的是探索自然界的基本物理定律。兩束粒子被加速至高能量，受強磁場引導，繞加速器環運動，然後相互碰撞。質子並非均勻散布在加速器的圓周，而是集中在所謂質子束內。碰撞產生的粒子被大型探測器觀測到。LHC 的一些參數可在表 1 找到。

LHC 環	
環的周長	26659 m
每道質子射線含有的質子束數目	2808
每道質子束含有的質子數目	1.15×10^{11}
質子射線	
質子能量	7.00 TeV
質心能量	14.0 TeV

表 1：相關的 LHC 參數的一般數值。

粒子物理學家用恰當的單位測量能量、動量和質量：能量用電子伏特 [eV]。根據定義，1 eV 是一個帶基本電荷 e 的粒子在一伏特電位差下運動得到的能量 ($1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ kg m}^2/\text{s}^2$)。

動量用 eV/c 的單位測量，而質量的單位是 eV/c^2 ，這裡 c 是真空中光速。因為 1 eV 是相當小的能量，粒子物理學家當用 MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$)，GeV ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) 或 TeV ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$)。

A 部分處理質子或電子的加速運動。B 部分討論如何確認 CERN 的對撞中產生的粒子。

A 部分 – LHC 加速器 (6 分)

加速：

假定質子在電位差 V 下加速，它們的速度非常接近光速，忽略因輻射或跟其它粒子碰撞引起的能量損失。

A.1 找出質子最終速度 v 的嚴格表達式，寫作加速電位 V 及物理常數的函數。 0.7pt

CERN 在未來的實驗計劃打算用 LHC 產生的質子跟能量為 60.0 GeV 的電子碰撞。

A.2 對高能量、低質量的粒子，最終速度 v 跟光速的相對偏差 $\Delta = (c - v)/c$ 相當小。找出 Δ 的第一階近似，對能量為 60.0 GeV 的電子計算 Δ ，用加速電位 V 及物理常數表達。 0.8pt

我們現在回來討論 LHC 的質子。假定束管是圓形的。

A.3 推導均勻磁通密度 B 的表達式，磁場必須能保持質子射線在圓形軌道上。表達式只應含有質子的能量 E ，週長 L ，基本常數及數字。若他們的效應小於最後一位小數的精準度，你可作合理近似。對能量為 $E = 7.00 \text{ TeV}$ 的質子，計算磁通密度 B ，忽略質子的相互作用。 1.0pt

輻射能量：

加速的帶電粒子以電磁波的方式釋放能量。以常角速度運動的帶電粒子的輻射功率 P_{rad} 只跟它的加速度 a ，電荷 q ，光速 c 及真空介電常數 ϵ_0 有關。

A.4 用量綱分析找出輻射功率 P_{rad} 的表達式。 1.0pt

輻射功率的正確公式包含一個 $1/(6\pi)$ 的因子；而且，完整的相對論推導要乘上一個額外的 γ^4 因子，這裡 $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 。

A.5 對能量 $E = 7.00 \text{ TeV}$ 的質子 (看表 1)，計算 LHC 輻射的總功率 P_{tot} 。你可作合理的近似。 1.0pt

直線加速器：

在 CERN，靜止的質子被長度為 $d = 30.0 \text{ m}$ 的直線加速器加速，穿過 $V = 500 \text{ MV}$ 的電位差。假定電場均勻。一個直線加速器由兩部分組成，看圖 1：

A.6 找出質子穿過電場的時間 T 。 1.5pt

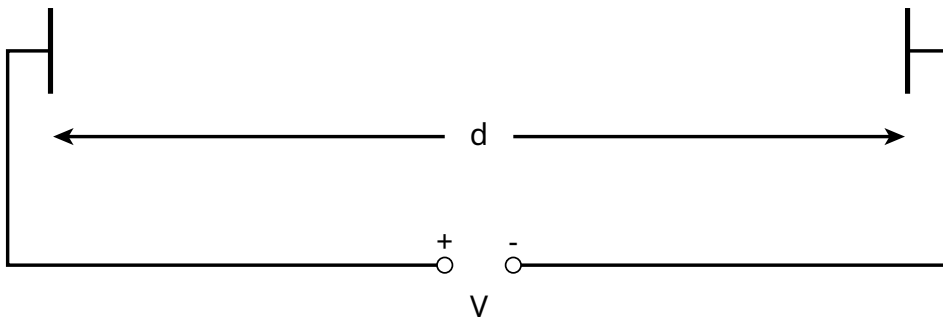


圖 1：加速器模組的示意圖。

B 部分－ 確認粒子 (4 分)

飛行時間：

確認碰撞產生的高能粒子對了解相互作用的過程非常重要。一個簡單的方法是測量一個動量已知的粒子穿過長度為 l 的俗稱飛行時間 (ToF) 偵測器的時間 (t)。偵測器確認的典型粒子及其質量列於表 2。

粒子	質量
重氫核	1876
質子	938
帶電 K 介子	494
帶電介子	135
電子	0.511

表 2：粒子及其質量

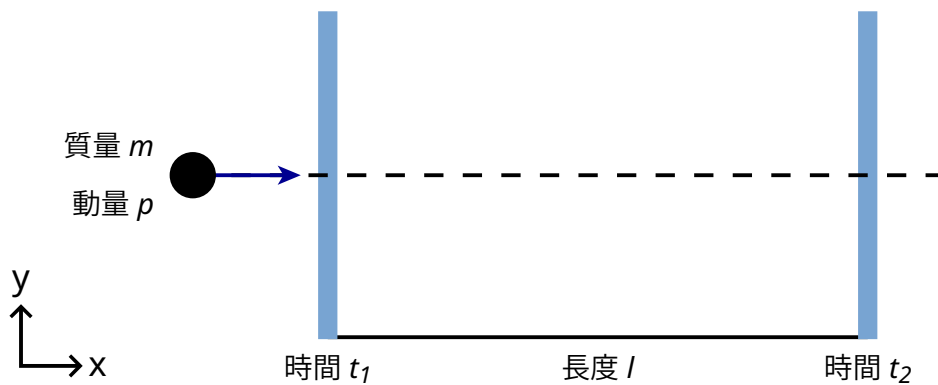


圖 2：飛行時間偵測器的示意圖。

B.1 將粒子的靜質量 m 表示為動量 p ，飛行長度 l 及飛行時間 t 的函數，假定粒子帶基本電荷 e ，在 ToF 偵測器內以接近光速作直線運動，垂直於兩個偵測平面 (看圖 2)。

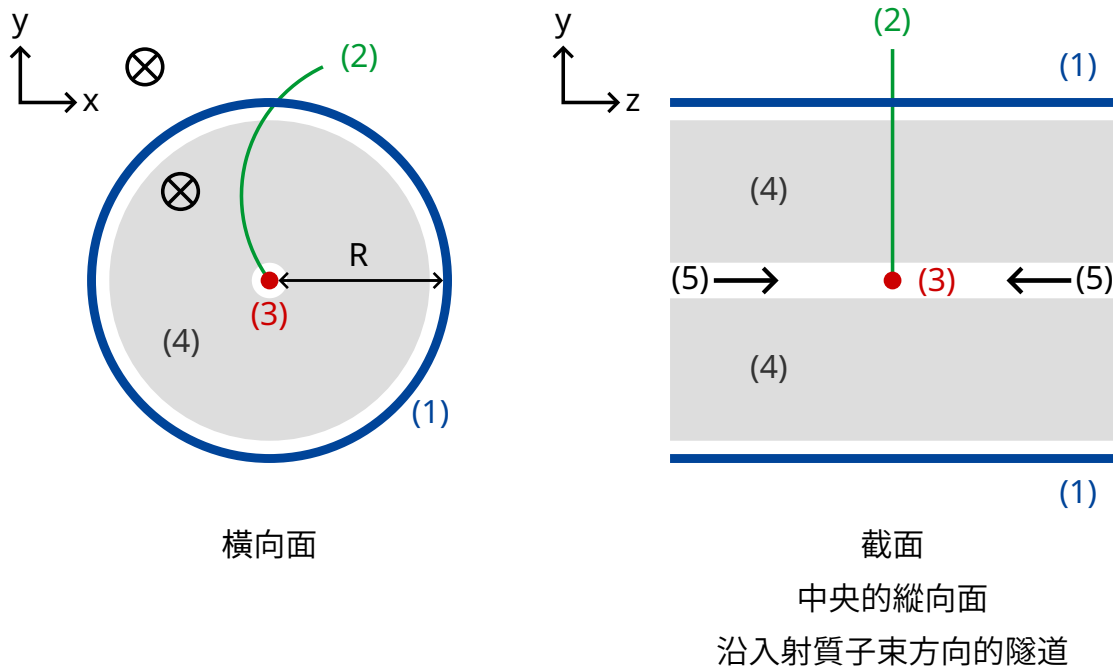
0.8pt

B.2 若要良好區分測量動量均為 $1.00 \text{ GeV}/c$ 的帶電 K 介子跟帶電介子，計算 ToF 側測器的最小長度 l 。良好區分指飛行時間的差大於偵測器的時間分辨率的三倍。偵測器的典型分辨率是 150 ps ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$)。

0.7pt

接下來，通常 LHC 偵測器產生的粒子在由軌跡探測器及 ToF 偵測器組成的兩級偵測器被確認。圖 3 是垂直及

平行於入射質子的偵測器示意圖。兩個偵測器都是環繞中心入射質子束的相互作用區域的隧道。軌跡探測器測量穿過磁場的帶電粒子的軌跡，磁場方向平行於入射質子。軌跡的半徑 r 用來定出粒子的橫向動量 p_T 。因為已知碰撞時間，ToF 偵測器只需用一個隧道測量飛行時間（碰撞跟被 ToF 隧道確認之間的時間）。這個 ToF 隧道只位於追蹤室後方。在本題，你可以假設碰撞產生的所有粒子運動方向垂直於入射的質子束，這意味著產生的粒子沒有沿入射質子束方向的縱向動量。



- (1) - ToF 隧道
- (2) - 軌跡
- (3) - 碰撞點
- (4) - 軌跡隧道
- (5) - 質子束
- ⊗ - magnetic field

圖 3：用軌跡探測器及 ToF 偵測器確認粒子的實驗裝置說明。兩個偵測器都是環繞中央碰撞點的隧道。左圖：垂直於入射質子束的橫向面。右圖：平行於入射質子束的縱向面。粒子的運動方向垂直於入射質子束。

B.3 將粒子質量用磁通密度 B ，ToF 隧道的半徑 R ，基本常數及測量數據表達。測量數據包括軌跡的半徑 r 及飛行時間 t 。 1.7pt

我們偵測到四個粒子，想要分辨它們。軌跡探測器的磁通密度是 $B = 0.500 \text{ T}$ 。ToF 隧道的半徑 R 是 3.70 m 。實驗數據如下 ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$)：

粒子	軌跡半徑 r [m]	飛行時間 t [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.31	25

B.4 透過計算質量，確認這四個粒子。

0.8pt