

大強子對撞機 (10 分)

在你開始作答本題前，請先細讀另一信封內的「理論考試通用指引」。

在本題中，我們將探討位在 CERN 的粒子加速器 LHC (大強子對撞機) 之相關物理。CERN 是世界上最大的粒子物理實驗室，其目標為深入了解自然界的基本定律。它利用強磁場將兩串粒子束沿著加速環加速到極高的能量，然後令其互相碰撞。質子在加速環中並非均勻分佈，而是群聚成許多個所謂的「叢集」。粒子束碰撞後所產生的粒子，則由大型偵測器來觀察。**表 1** 列出 LHC 的一部分相關參數。

LHC 環	
環的周長	26659 m
每個質子束中的叢集數	2808
每個叢集中的質子數	1.15×10^{11}
質子束	
單一質子的能量	7.00 TeV (兆電子伏特)
對撞質子對的質心能量	14.0 TeV (兆電子伏特)

表 1：LHC 相關參數的典型數值

粒子物理學家習慣使用一個簡便的單位系統來描述能量、動量、和質量：能量的單位為電子伏特 [eV]，其定義為帶有單位電荷 e 的一個粒子經過 1 伏特之電位差的加速後所獲得的能量 ($1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}$)。

動量的單位為 eV/c ，而質量的單位則為 eV/c^2 ，其中的 c 為真空中的光速。由於 1 eV 是很小的能量，所以粒子物理學家常使用 MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$), GeV ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) 或 TeV ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$) 等單位。

以下的 A 部分將探討質子或電子的加速，B 部分則與 CERN 對撞實驗所產生之粒子的辨識有關。

A 部分. LHC 加速器 (6 分)

加速：

假設有一個質子經一電位差 V 加速至接近光速。忽略過程中因輻射效應或與其他粒子碰撞所造成的能量損失。

A.1 求出上述質子的末速 v ，將之表示為上述之加速電位差 V 及相關物理常數的函數。 0.7pt

CERN 計畫在未來讓 LHC 中的質子與能量為 60.0 GeV 的電子相撞。

A.2 對於高能量、低靜止質量的粒子而言，其末速 v 與光速的相對差異 $\Delta = (c - v)/c$ 極為微小。求出 Δ 的一階近似式，然後用此近似式求出對應於能量為 60.0 GeV 的電子之 Δ 。 0.8pt

現在我們回到 LHC 中的質子問題。假設粒子束在圓環形的管中運動。

A.3 為了使質子束能保持圓形的運動軌跡，我們需要一個均勻的磁場 B ，求出 B 的公式。公式中只能有單一質子的能量 E 、加速圓環的周長 L 、物理常數、以及數學常數和數字。在不影響答案之有效精準度的前提下，你可以使用適當的近似。針對能量為 $E = 7.00 \text{ TeV}$ 的單一質子而言，求出其所需的磁場 B 之值。計算過程中忽略質子間的交互作用。 1.0pt

輻射功率：

加速中的帶電粒子會以電磁波的形式輻射出能量。對於一個作等速率圓周運動的帶電粒子而言，其輻射功率 P_{rad} 只與下列物理量有關：粒子的加速度 a 、粒子所帶電荷 q 、光速 c 、以及真空電容率 ϵ_0 。

A.4 利用因次分析法，求出輻射功率 P_{rad} 的一個表示式。

1.0pt

在真正的輻射功率公式中，多了一個 $1/(6\pi)$ 的係數；此外，在考慮完整的相對論效應推導時，也會多出一個額外的乘數因子 γ^4 ，其中 $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 。

A.5 若單一質子的能量為 $E = 7.00 \text{ TeV}$ ，試求出 LHC 的總輻射功率 P_{tot} （參見表 1）。你可以使用適當的近似。

1.0pt

直線加速：

在 CERN，質子都是透過直線加速器自靜止開始加速，直線加速器的長度為 $d = 30.0 \text{ m}$ 、加速電位差為 $V = 500 \text{ MV}$ 。假設加速器中的電場為均勻。如圖 1 所示，直線加速器的兩端各有一片電位板。

A.6 求出質子通過這個電場所需的時間 T 。

1.5pt

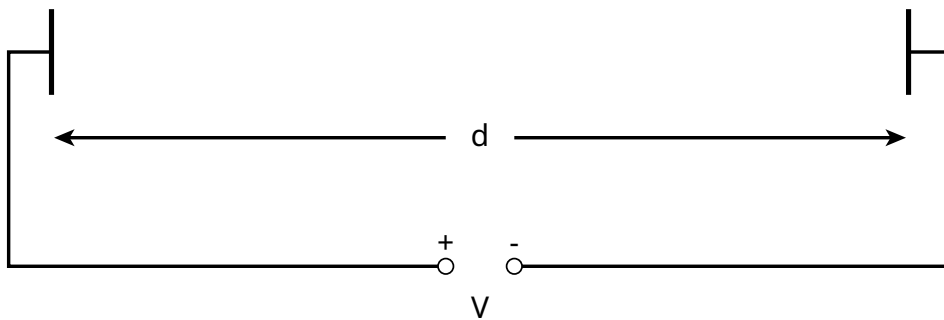


圖 1：直線加速模組的簡圖。

B 部分. 粒子辨識 (4 分)

飛行時間：

為了能夠解釋粒子對撞的物理交互作用，我們必須先能夠辨識對撞後所產生之高能粒子的種類。一個簡單的辨識方法是量測粒子的飛行時間 (t)，也就是在所謂的「飛行時間 (Time-of-Flight, 簡稱 ToF) 偵測器」中，量測一個已知動量之粒子在通過長度為 l 的路徑時所需的總飛行時間。表 2 中所列出的，是偵測器中所常見的粒子種類及其質量。

粒子種類	質量 [MeV/c ²]
Deuteron (重氫)	1876
Proton (質子)	938
charged Kaon (帶電 K 介子)	494
charged Pion (帶電 π 介子)	140
Electron (電子)	0.511

表 2：各類粒子及其質量。

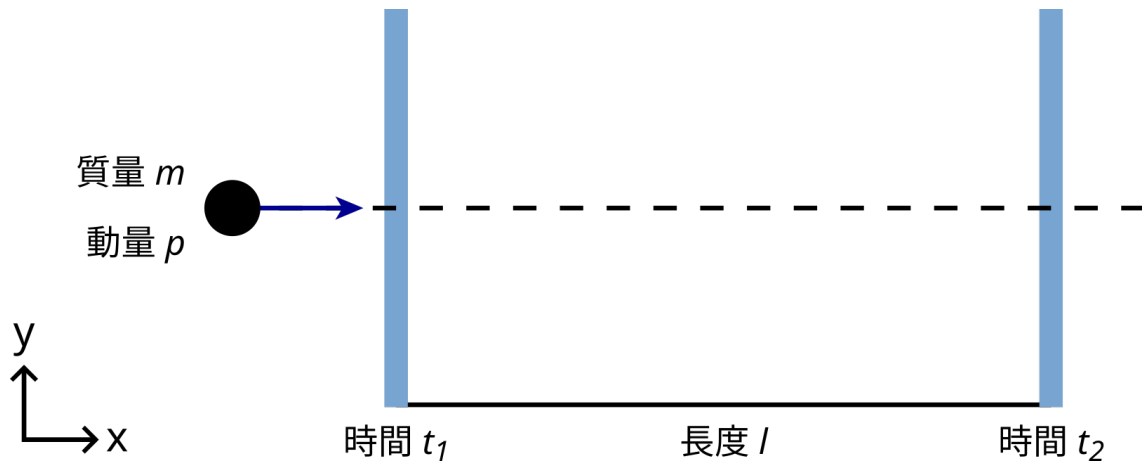


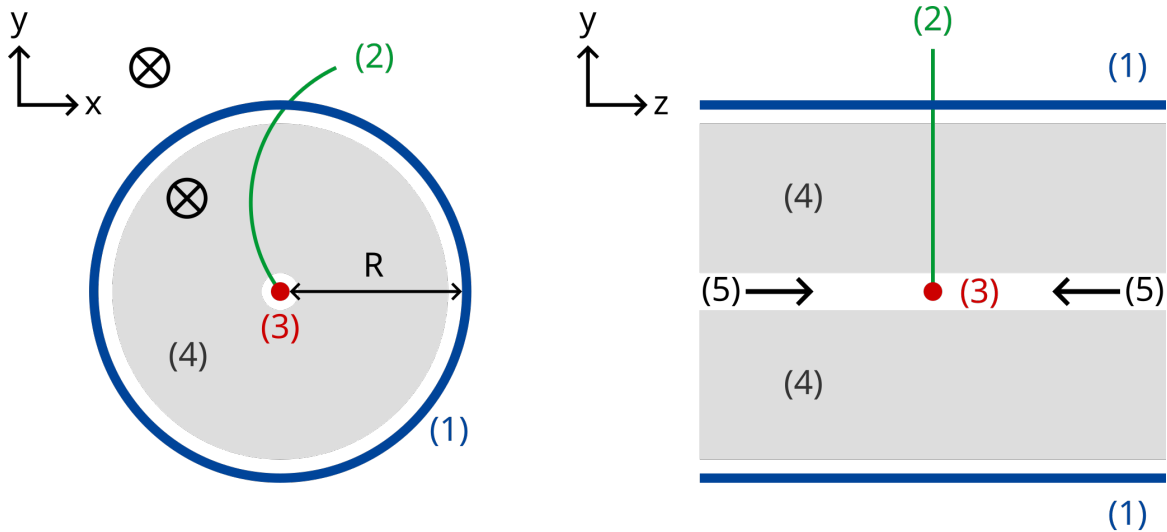
圖 2：「飛行時間 (ToF) 偵測器」的簡圖。

B.1 求出粒子質量 m 的表示式，將之以下列的物理量表示之：動量 p ，飛行長度 l 以及飛行時間 t 。假設在飛行時間偵測器中，粒子帶有電荷 e ，而且皆沿直線路徑以接近光速飛行，且飛行的直線路徑與偵測器兩側的偵測板垂直（參見圖 2）。 0.8pt

B.2 為了能讓 ToF 偵測器清楚地分辨動量同為 $1.00 \text{ GeV}/c$ 的帶電 K 介子及帶電 π 介子，ToF 偵測器內的路徑長 l 必須大於某個值，求出這個最短路徑長 l 。所謂的清分辨，是指兩粒子的飛行時間 (ToF) 差異，至少要是偵測器之時間解析度的三倍，而典型 ToF 偵測器的時間解析度為 150 ps ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$)。 0.7pt

在下一段中，LHC 所產生的各種粒子在偵測器中會以兩階段的方式被辨識，也就是偵測器是由兩個子偵測器所構成，一個是軌跡記錄器、另一個則是 ToF 偵測器。圖 3 所示的是偵測器中相對於質子束方向的橫向斷面圖及

縱向斷面圖。兩個子偵測器都是呈柱形管狀、包覆著粒子的對撞作用區，而粒子束則是通過柱形管的中心軸。軌跡記錄器所記錄的是帶電粒子在磁場中的軌跡，其中磁場的方向平行於質子束。弧形軌跡的半徑 r 可用以求出粒子在切向（transverse，即垂直於徑向）方向上的動量 p_T 。由於對撞的發生時間是個可以控制的已知時間，所以 ToF 偵測器只需一個柱形管就能量測飛行時間（飛行時間即為從碰撞發生起至粒子被 ToF 偵測管探測到的時間間隔），此 ToF 偵測管緊套於軌跡記錄腔的外圍。在以下的作答過程中，你可以假設所有因對撞而產生的粒子都是沿著垂直於質子束的方向（橫向）運動，也就是說，所有新產生的粒子都沒有沿質子束方向上（縱向）的動量。



橫向斷面圖

從管子中心所看到的
縱向(沿粒子束方向)
斷面圖

- (1) - ToF 偵測管
- (2) - 粒子軌跡
- (3) - 粒子對撞點
- (4) - 軌跡記錄腔
- (5) - 質子束
- ⊗ - 磁場

圖 3：用以辨識粒子的實驗裝置，包括一個軌跡記錄腔及一個 ToF 偵測管。這兩個子偵測器都呈柱形管狀、包覆著中央的粒子對撞區。

左圖：與粒子束方向垂直的橫向斷面圖。

右圖：與粒子束方向平行的縱向斷面圖。撞擊後所產生之新粒子的運動方向與粒子束的方向垂直。

B.3 求出粒子質量的表示式，用以下各物理量表示之：磁場強度 B , ToF 偵測管的半徑 R , 1.7pt 物理基本常數, 量測到的新粒子軌跡半徑 r , 以及量測到的新粒子飛行時間 t 。

我們在某次實驗中偵測到四顆粒子，接下來要設法辨識它們。在軌跡記錄腔中的磁場強度為 $B = 0.500 \text{ T}$ 。ToF 偵測管的半徑 R 為 3.70 m 。以下為實驗中所偵測到之四顆粒子的相關量測數值 ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$)：

粒子編號	軌跡半徑 r [m]	飛行時間 t [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.31	25

B.4 逐一估算上表中四顆粒子的質量，然後據此判斷它們分別是什麼種類的粒子。

0.8pt